

ようこそ 数学科 ガイダンスへ

数学の最先端—普遍の真理と創造への挑戦
～数学科で学ぶもの～

2023年5月2日 数理棟 大講義室

理学部数学科 学科長

小林 俊行 教授

代数学 辻 雄 教授

幾何学 古田 幹雄 教授

解析学 宮本 安人 教授

応用数理 吉田 朋広 教授

ようこそ 数学科ガイダンスへ

- 5月2日(火) 18:45～

数学の最先端

--- 普遍の真理と創造への挑戦

～数学科で学ぶもの～

ようこそへ数学科へ

5月2日 18:45～

1. 数学科の紹介 (学科長)
2. 代数学 (辻 教授)
- 3 幾何学 (古田 教授)
- 4 解析学 (宮本 教授)
- 5 応用数理 (吉田 教授)

理学部数学科紹介



駒場キャンパス
数理科学研究科棟



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

東大 理学部 数学科の特徴

世界的数学者が駒場キャンパスに集合し
君たちを待っている

代数・幾何・解析・応用数理の
教員が約60名

数学は国際的な学問
(宇宙人とでも「数学」ならば話が通じるかも)

世界中の天才・歴史上の人物 との切磋琢磨

数学科と数理科学研究科

- 1877年(明治10年): 東京大学創設
数学物理学及び星学科 設置
- 1881年: 理学部 数学科 発足
- 1992年: 大学院数理科学研究科 発足

(本郷の理学部数学科と駒場の教養学部の数学科教室＋教養学部基礎科の数理コースが統合し、駒場に数理棟を建設)

純粋数学(代数、幾何、解析)・応用数理

駒場キャンパスを本拠地とし、東京大学の数学部門が統合し、前期課程の数学、理学部数学科、大学院まで一貫して数学教育を担当している。

東京大学理学部数学科出身の数学者



高木貞治(1875-1960)

第一回フィールズ賞授
賞委員
類体論とヒルベルトの
問題(第9、第12問題)
の解決



小平邦彦(1915-1997)

複素多様体の研究、国
内初のフィールズ賞



伊藤清(1915-2008)

確率解析の創始
第一回ガウス賞受賞

数学の学び方—個性を生かす

東京大学の歴代の教授
を勤めた数学者13名
(1915-現在) による

数学を志す学生への
個性豊かなメッセージ

小平邦彦(日本初のフィールズ
賞受賞者)編 (岩波書店2015)



理学部数学科の必修科目

- 2年生Aセメスターの必修科目（代数と幾何，集合と位相，複素解析）（講義 + 演習）

- 3年生Sセメスター必修科目（午前は講義＋午後に演習）

（月） 幾何学I（多様体論の入門），

（火） 代数学I（群論と環論の入門）

（水） 解析学IV（ルベーグ測度と積分の入門）、

（木） 複素解析学II

3年生Aセメスターは種々の選択必修科目

- 4年生の必修科目

教員の個別指導による本格的なセミナー

現代数学を概観するオムニバス講義

数学とは何か？

- 数学は**厳密な論理**で証明された永遠の真理
- 対象の**普遍的構造**を抽出した概念を土台にし、結論はきわめて汎用的
- 数学は**科学の共通言語**（←数理モデル）

神は幾何学者である（プラトン）

数学とは異なったものを同じとみなす技術である（ポアンカレ）

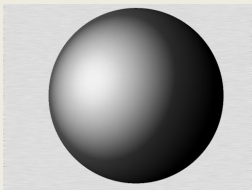
正しい見方をすれば、数学は真実だけでなく、最高の美を有する（ラッセル）

数学の研究はタイムスパンが長い！

- フェルマ予想 (1637)
谷山-志村(1950年代)
A. Wiles(1995)
- ポアンカレ予想(1904)
G. Perelman (2003)
単連結な閉じた3次元の図形は3次元球面

$$x^n + y^n = z^n$$

nが3以上のとき自然数解をもたない



$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}$$

空間形予想

定曲率の閉じた高次元空間の存在問題（未解決！）

Clifford, Klein (1891), Wolf, 小林 (20世紀後半)

何が応用されるか予想つかない

- 線形代数・代数幾何・整数論
→ 符号・暗号理論
- 積分幾何学(1920年代)
→ ノーベル医学賞(1979)や地質探査
- 確率微分方程式 (1940年代)
→ 数理ファイナンス(1980年代)
- 非ユークリッド幾何 (1820頃)・リーマン幾何 (1854-)・擬リーマン幾何学
→ 相対性理論 (1905, 1915)

数学は役に立っているか？

社会における数学

- 数学的思考力・本質を見抜ける力をもった学生の需要が社会において増大している。
- 物理学，工学，情報科学分野における土台としての数学の役割に加え、AIやbig dataの分析にも数学が土台となっている。
- 数理統計学，数理・計量ファイナンス、数理モデリング、データサイエンス etc.

数学科卒業後の進路

年度	大学院進学	企業	学校等	官公庁	研究生	その他	合計
2016	31 (数理24)	4 (金融保険3, 他1)	1	0	0	9	45
2017	33 (数理27)	2 (メーカー他2)	0	0	0	6	41
2018	25 (数理19)	5 (金融保険2, メーカー他3)	4	1	0	5	40
2019	29 (数理22)	4 (金融保険3, メーカー1)	0	0	1	11	45
2020	29 (数理19)	4 (金融保険3, 他1)	1	0	0	14	48
2021	30 (数理23)	2 (金融保険1, 他1)	1	1	0	9	43

大学院進学が多数をしめる(だいたい2／3強)

企業では**金融・保険**, **IT系**など専門職、
公務員では、**官僚・教員**への就職が多い

修士修了後の進路

年度	博士課程進学	企業	学校等	官公庁	その他	合計
2016	23 (数理23)	10 (金融保険5, 他5)	1	0	3	37
2017	21 (数理21)	13 (金融保険7, 他6)	0	0	3	37
2018	21 (数理21)	21 (金融保険6, 他15)	0	0	7	49
2019	18 (数理17)	12 (金融保険4, 他8)	0	0	2	32
2020	19 (数理18)	6 (金融保険5, 他1)	1	1	8	35
2021	19 (数理18)	11 (金融保険5, 他6)	0	1	4	35

博士課程で**研究者/専門職**をめざす者と就職する者が約半数ずつ

アカデミア以外での博士への需要もたかまっている。

参考：数学科パンフレット(2021年度版)

<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/sugakuka2021.pdf>

博士修了後の進路

年度	ポスドク	企業	助教	教員	研究員	その他	合計
2016	18	4	5	1	0	2	30
2017	19	3	2	0	0	0	24
2018	21	4	3	0	0	0	28
2019	19	2	2	0	0	0	23
2020	8	1	1	0	7	0	17
2021	8	5	1	0	6	0	20

現代数学の分野を大別すると

- **代数分野** 代数的な構造に問題を帰着して、問題をとらえる整数論、代数幾何、表現論など
- **幾何分野** 問題を図形的に扱う、微分幾何、トポロジー、対称性の数学、リー群論・表現論など
- **解析分野** 関数の性質を問う、微分方程式論、関数解析
- **応用数理分野** 確率統計、数値解析、数理物理、数学基礎論、計算機科学、データサイエンス、数理モデリング等

独創的な研究はこれらの分野にまたがることも多く、
これらの分野の境目がはっきりしているわけではない。

ようこそ 数学科 ガイダンスへ

数学の最先端—普遍の真理と創造への挑戦
～数学科で学ぶもの～

2023年5月2日 数理棟 大講義室

理学部数学科 学科長

小林 俊行 教授

代数学

辻 雄 教授

幾何学

古田 幹雄 教授

解析学

宮本 安人 教授

応用数理

吉田 朋広 教授

代数学の紹介

辻 雄

2023 年 5 月 2 日 理学部数学科ガイダンス

代数学

加減乗除の四則に代表される演算を基礎とする分野.

「数の体系 (代数系)」 = 「何らかの演算の入った集合」
の性質やそれに関連した問題を扱う.

代数学の概念は数学の他の分野や諸科学にも自然に現れ,
代数学は幾何学, 解析学の手法や考えとも結びついて発展している.

数の体系の例:

- 整数の集合 $\mathbf{Z}$ (和, 差, 積)
- 有理数の集合 $\mathbf{Q}$, 実数の集合 $\mathbf{R}$, 複素数の集合 $\mathbf{C}$ (四則演算).

～1 年生の講義より～

- n 次正方行列全体のなす集合 (和, 差, 積)
- 平面ベクトル全体のなす集合, $\mathbf{R}$ 上の線形空間 V (和, 差, 実数倍)
- V の線型変換全体のなす集合 (和, 差, 合成). V に作用.

～2 年生の講義より～

- 同次 (斉次) の線型常微分方程式の解全体は線形空間をなす.

代数学の研究分野

- 数論 整数に関連した問題を扱う.
- 代数幾何学 多項式で定義された図形を調べる.
- 表現論 対称性を線形代数的な手法を使って分析する.
- 群論・環論・組み合わせ論
など.

幾何, 解析, 理論物理, 計算機科学など他分野との結びつきも深い.

カリキュラム

2年

代数学と幾何（＋演習） 抽象線形代数学

3年

代数学Ⅰ（＋演習） 群論（加減あるいは乗除の体系）

代数学Ⅱ（＋演習） 環論（加減乗の体系）

代数学Ⅲ（選択） 体論（加減乗除の体系）

輪講（選択） 数論，代数学幾何学，表現論などの入門的教科書

4年

テキストセミナー

ホモロジー代数，リーマン面・代数曲線論 / 代数的整数論，可換環論
（隔年で開講）

その他，専門的な講義.

輪講，テキストセミナーは数学の専門書を何人かの学生で読むセミナー.

セミナーは大変重要. 4年における生活の重要な部分を占める.

整数論の紹介（例）

- 代数方程式の解

例： $x^n = 1$ の解を使ってかける数

$$y^2 - y = x^3 - x^2 \text{ の有理数解}$$

$$x^n + y^n = z^n \text{ の整数解 (Fermat 予想)}$$

- 解析的関数の数論的性質

例： $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$ （リーマンゼータ関数）

$$f(q) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^2 (1 - q^{11n})^2 \quad (\text{保型形式})$$

$f(q) = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + \cdots$ と展開する.

$y^2 - y = x^3 - x^2$ の mod 2, mod 3, mod 5, mod 7, mod 13, ... での解の個数は, $q^2, q^3, q^5, q^7, q^{13}, \dots$ の係数から分かる

($\rightsquigarrow$ 楕円曲線の保型性, Langlands 予想).

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{1}{6}\pi^2$$

$$\zeta(12) = 1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \cdots = \frac{691}{638512875}\pi^{12}$$

右辺の有理数の分子に現れる数は、 $x^n = 1$ の解を使ってかける数の世界での「素因数分解の一意性の成り立たなさ」と関係がある (↷ 岩澤理論) .

パズルとしての数学から 理論としての数学へ

幾何学の例

説明したいこと

- 数学において問題を解くとはどういうことか
- 「思い付き」の集積から「理論体系」の構築へ
- 幾何学の例をひとつ紹介したい

- 参考 リッペルスハイ等による望遠鏡の発明
- ガリレオ 天空に向けた 月、木星の衛星
- 天文学の学問としての流れ

(1) オイラー数

- ・球面の表面を多角形で分割するとき、

頂点の数－辺の数＋面の数 は常に 2 になる。

- ・トーラスでは常に 0 になる。

(2) フェルマーの問題の多項式版

- ・ $a^n + b^n = c^n$ となる自然数 $a, b, c \geq 1$ は $n \geq 3$ では存在しない
- ・ この命題は a, b, c が多項式のときにはどうなるだろうか？
 - ・ ・ ・ という問題を考えてみる。

(1) について：ひとつの理論的展開

- ひとつの曲面ではなく、ふたつの曲面の間の写像を考える。

例： トーラスから 球面へ の連続写像

トーラスから球面への連続写像であって、次のようなものを具体的に作ることができる。

- ほとんどの点で $2 : 1$ に対応している
 - 例外が4点あり、そこでは $1 : 1$ に対応している。
-
- $[\text{トーラスのオイラー数}] = 2 \times [\text{球面のオイラー数}] - 4$
 $0 = 2 \times 2 - 4$

★ 球面からトーラスへの連続写像であって
次のようなものはあるだろうか？

- ほとんどの点で $n:1$ に対応している。
- 例外が有限点あり、そこでは n より小さい個数の点が1個の点に対応している。

オイラー数を用いて考察する。

- $[\text{球面のオイラー数}] = 2 \times [\text{トーラスのオイラー数}] - m$

$$2 = n \times 0 - m$$



これは不可能

(2) について：複素数平面を用いる

- $n \geq 3$ に対して、

$$f(z)^n + g(z)^n = h(z)^n \quad \text{を満たす}$$

定数でない多項式 $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ は存在するだろうか？

答 不可能

★ この不可能性を先ほどの不可能性に帰着する「理論」がある

複素数平面を用いて幾何学的に考察する。

- z がすべての複素数を動くとき、「複素数平面」 : それに1点を付け加えると球面の形状。
- $u^3 + v^3 = 1$ となる複素数 u, v のすべての組の集合考える。 : それに3点を付け加えるとトーラスの形状
- 仮に上のような多項式 $f(z), g(z), h(z)$ が存在したとする。このとき次を考える。

$$u = \frac{f(z)}{h(z)} \quad v = \frac{g(z)}{h(z)}$$

- この式を利用して球面からトーラスへの写像を作ることができる。
- この写像を考察すると、存在が不可能であることをさきほど示された写像になっていることがわかる。



矛盾

まとめ

- ひとつの問題が解けるのはどのようなときか。

理論を少しずつ展開する。

- ➡ 異なる理論が組み合わさり、新しい展望が開ける
- ➡ **もとの問題が、その展望の中に入っている場合がある！**
- ➡ **問題がとけることになる**

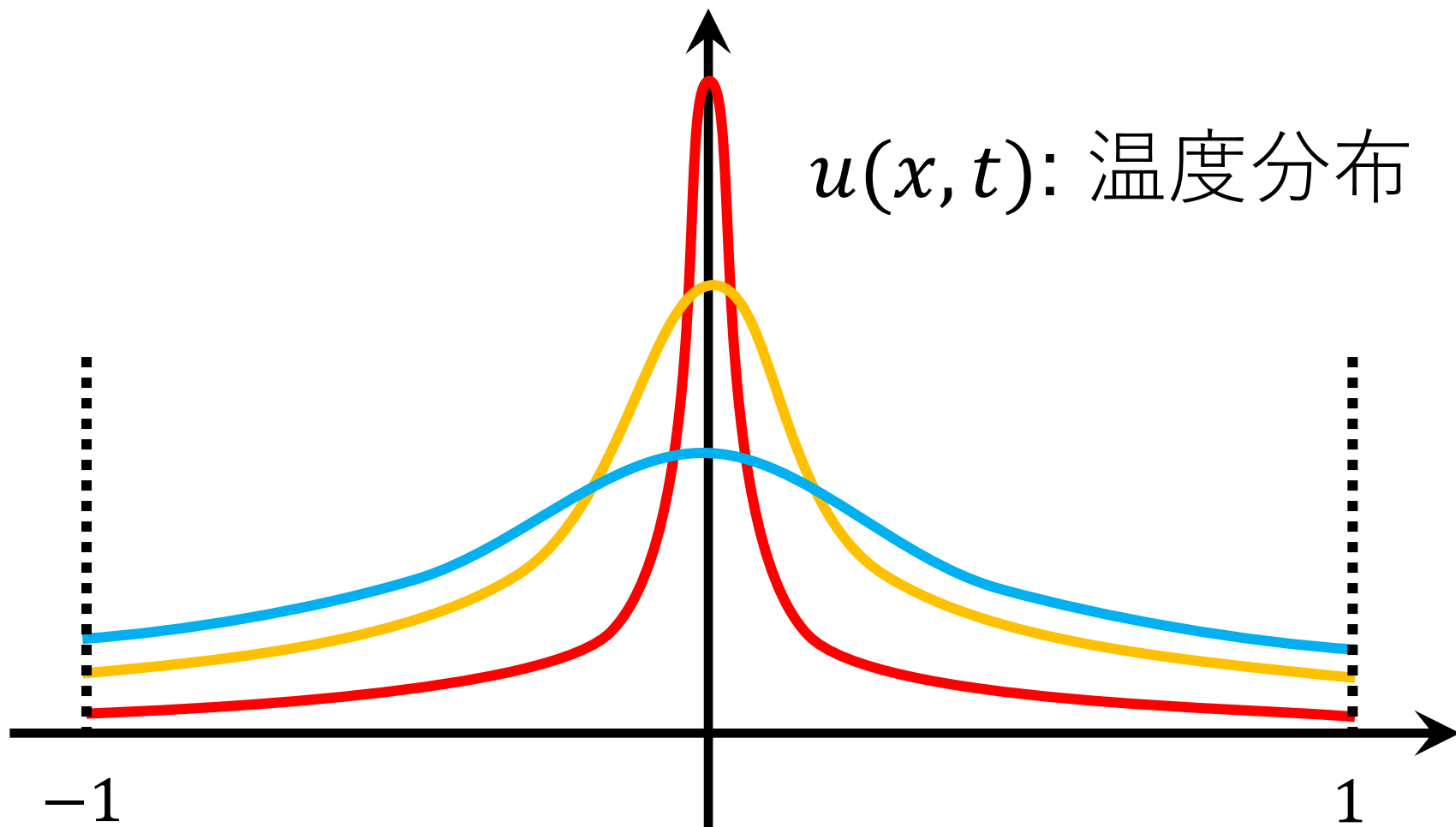
・・・そのような理論を展開することが数学の研究の一側面

解析班

熱伝導方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

$u(x, t)$: 温度分布

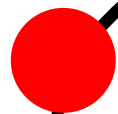


熱伝導方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, t)$$

境界で熱の出入りがない
(断熱壁)

?



Ω

最も温かい点 (ホットスポット) はどこか？

ナビエ・ストークス方程式系

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial z^2} \right) \end{array} \right.$$

流体の運動を記述

($\mathbf{u}(x, y, z, t)$, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, $\mathbf{w}(x, y, z, t)$): 未知関数

解があるのか？ もしあったら1つなのか？
空気にトゲはないのか？

反応拡散モデル



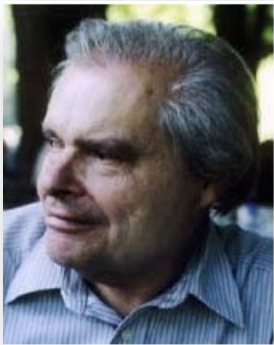
アラン・チューリング (1912-1954)

The chemical basis of morphogenesis (1952)

拡散はパターン（模様）を生成しうる！

計算機科学の父、数学者、論理学者、戦時中の暗号解読者、偏見の犠牲者
(Father of Computer Science, Mathematician, Logician,
Wartime Codebreaker, Victim of Prejudice)

$$\begin{cases} u_t = D\Delta u - \mu u + c\rho(x) \frac{u^p}{v^q} + \rho_0\rho(x) \\ \tau v_t = D\Delta v - v v + \rho'(x) \frac{u^r}{v^s} \end{cases}$$

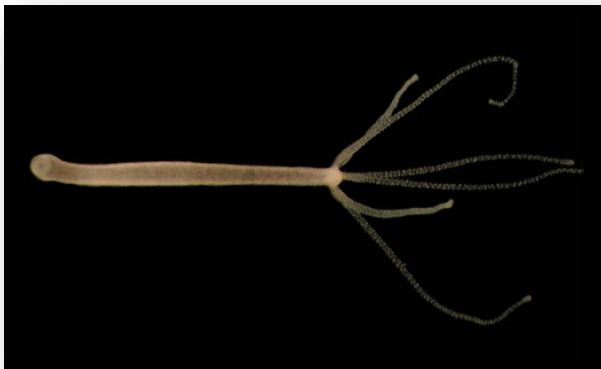


アルフレッド・ギーラー



ハンス・マインハルト

約 5 mm



Kybernetik 12, 30—39 (1972)
© by Springer-Verlag 1972

A Theory of Biological Pattern Formation

A. Gierer and H. Meinhardt
Max-Planck-Institut für Virusforschung, Tübingen, Germany

Received: September 8, 1972

Abstract

One of the elementary processes in morphogenesis is the formation of a spatial pattern of tissue structures, starting from almost homogeneous tissue. It will be shown that relatively simple molecular mechanisms based on auto- and cross catalysis can account for a primary pattern of morphogens to determine pattern formation of the tissue. The theory is based on short range activation, long range inhibition, and a distinction between activator and inhibitor concentrations on one hand, and the densities of their sources on the other. While source density is expected to change slowly, e.g. as an effect of cell differentiation, the concentration of activators and inhibitors can change rapidly to establish the primary pattern; this results from auto- and cross catalytic effects on the sources, spreading by diffusion or other mechanisms, and degradation.

Employing an approximative equation, a criterium is derived for models, which lead to a striking pattern, starting from an even distribution of morphogens, and assuming a shallow source gradient. The polarity of the pattern depends on the direction of the source gradient, but can be rather independent of other features of source distribution. Models are proposed which explain size regulation (constant proportion of the parts of the pattern irrespective of total size). Depending on the choice of constants, aperiodic patterns, implying a one-to-one correlation between morphogen concentration and position in the tissue, or nearly periodic patterns can be obtained. The theory can be applied not only to multicellular tissues, but also to intracellular differentiation, e.g. of polar cells.

The theory permits various molecular interpretations. One of the simplest models involves bimolecular activation and monomolecular inhibition. Source gradients may be substituted by, or added to, sink gradients, e.g. of degrading enzymes. Inhibitors can be substituted by substances required for, and depleted by activation. Sources may be either synthesizing systems or particulate structures releasing activators and inhibitors.

Calculations by computer are presented to exemplify the main features of the theory proposed. The theory is applied to quantitative data on hydra—a suitable one-dimensional model for pattern formation—and is shown to account for activation and inhibition of secondary head formation.

Introduction

The development of an organism is a complex phenomenon involving a set of more elementary processes such as gene regulation, alteration of cell shapes and cell to cell interaction, cell proliferation, growth and cell movement. One of these elementary processes

in embryology and regeneration is the formation of a spatial pattern of tissue structures. Starting from almost homogeneous tissue, different areas develop strikingly different structures. In some cases, their proportions are regulated to be independent of total size. The pattern may be aperiodic or periodic.

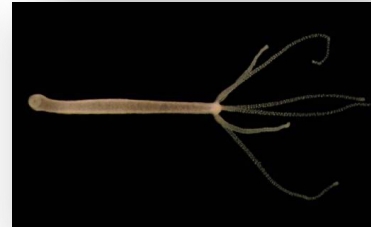
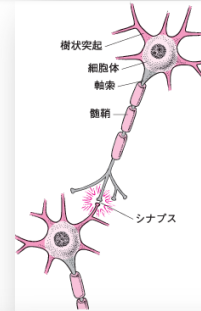
The formation of a morphological pattern is generally assumed to result from a primary pattern (Child, 1941; Waddington, 1962) of morphogen concentrations, or other physical parameters varying in space, often called gradients or fields. Several types of theories have been proposed for this primary pattern: A patterned morphogen distribution can result from auto- and cross catalysis (Turing, 1952). Polar cells may be assumed to pump morphogens in one direction, leading to a graded distribution (Lawrence, 1966). Two periodic events of different wavelengths have been postulated, where the phase difference, which varies in space, is assumed to determine morphogenesis (Goodwin and Cohen, 1969). This paper is concerned with mechanisms of auto- and cross catalysis which are most closely related to known biochemical processes and cellular properties.

Models of differentiation can be constructed by postulating two substances, with mutual interaction on their respective rates of production (or degradation). Depending on initial conditions, this may lead to different stable states, which may represent states of differentiation (e.g. Delbrück, 1949). Spatial differentiation can be achieved by postulating, in addition, different modes or rates of distribution of these substances in space, e.g. by linear equations employing different diffusion terms as proposed by Turing (1952). However, the solutions of the linear system are generally unstable. Non-linear reaction kinetics, on the other hand, are too general to permit simple and straightforward interpretations in terms of molecular biology unless restrictions are imposed by biological considerations.

These restrictions will be introduced by basing the theory on three postulates suggested by fairly general

A. Gierer and H. Meinhardt,
A theory of biological pattern formation,
Kybernetik 12 (1972) 30—39.

- **神経（軸索）におけるパルスの伝播**
- **熱帯魚，貝，シマウマなどの縞模様**
- **捕食・被捕食モデル（生態モデル）**
- **化学反応（BZ反応）**
- **生物の形態形成**



予測や説明

**反応拡散系
半線形放物型方程式系**

を研究すれば・・・

理学部ガイダンス・応用数理 令和5年5月2日

数理科学への誘い

吉田朋広

東京大学大学院数理科学研究科

応用数理とは

- 数学の三つの柱である代数学・幾何学・解析学を取り巻く広大な分野を対象とする数理科学。
- 種々の現象に対する数理モデリング、および数理モデルの数学的性質を研究対象にする。
- 既成の数学の応用にとどまらず、実際の現象にアプローチするための新しい数学の理論を構築する。

応用数理

- (A) 非線形現象の数理
- (B) 数理物理
- (C) 確率と統計の数理
- (D) 数学基礎論、計算機科学

- 「確率と統計の数理」の具体的な問題を紹介します。

確率と統計の数理：確率的な漸化式

- ϵ_j ($j \in \mathbb{N}$): 確率 $1/2$ で $+1$, -1 を取る、
独立な確率変数の列 (硬貨投げ)
- 確率的な漸化式

$$a_j = f(a_{j-1}) + g(a_{j-1})\epsilon_j, \quad a_0 = c$$

例

- $f(x) = x$, $g(x) = 1$ のとき $a_j = a_{j-1} + \epsilon_j$
- $c = 0$, $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_3 = -1$, のとき、

$$a_0 = c = 0$$

$$a_1 = a_0 + \epsilon_1 = 0 + 1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + \epsilon_2 = 1 + 1 = 2,$$

$$a_3 = a_2 + \epsilon_3 = 2 - 1 = 1, \dots$$

確率的な漸化式： $j = 1000$ まで実験してみる

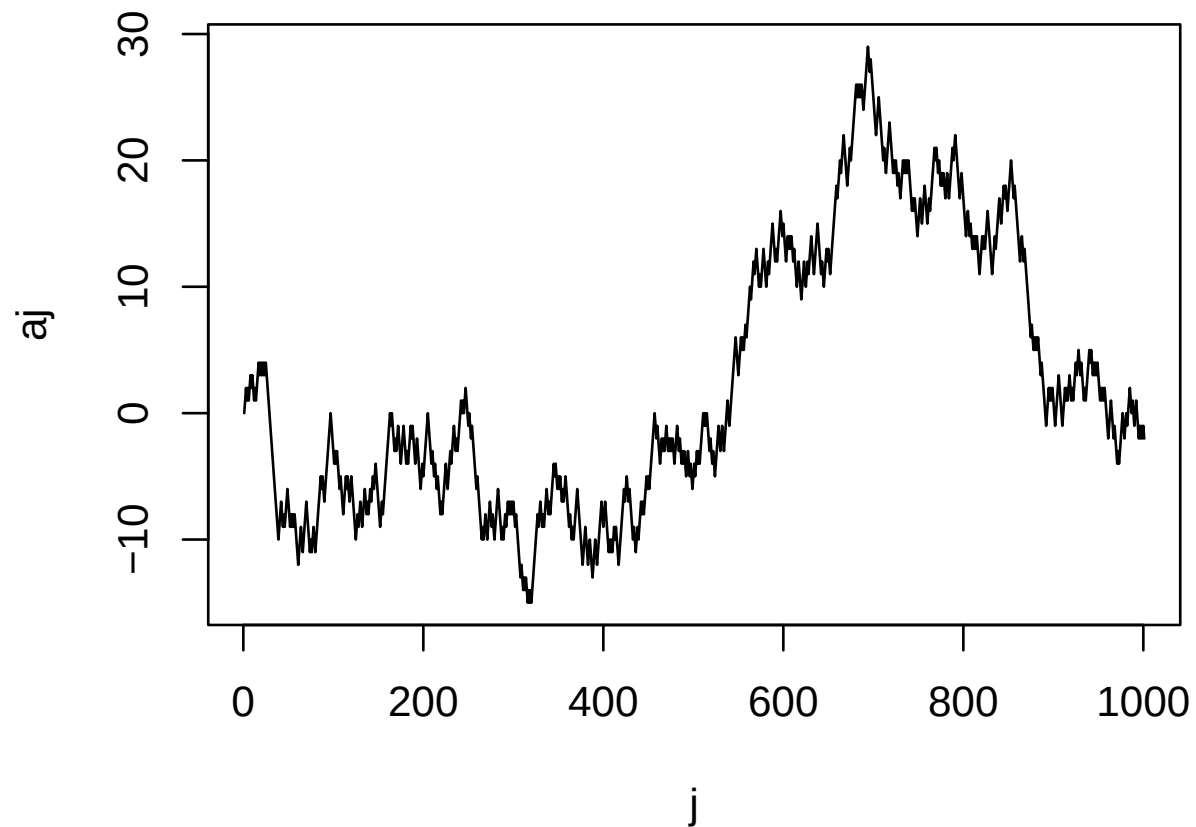


Figure 1: $a_j = a_{j-1} + \epsilon_j$, $a_0 = 0$

確率的な漸化式

- 確率的な漸化式

$$a_j = f(a_{j-1}) + g(a_{j-1})\epsilon_j, \quad a_0 = c$$

の極限（時空間スケーリング：グラフを遠くから眺める）

↓

- 確率微分方程式

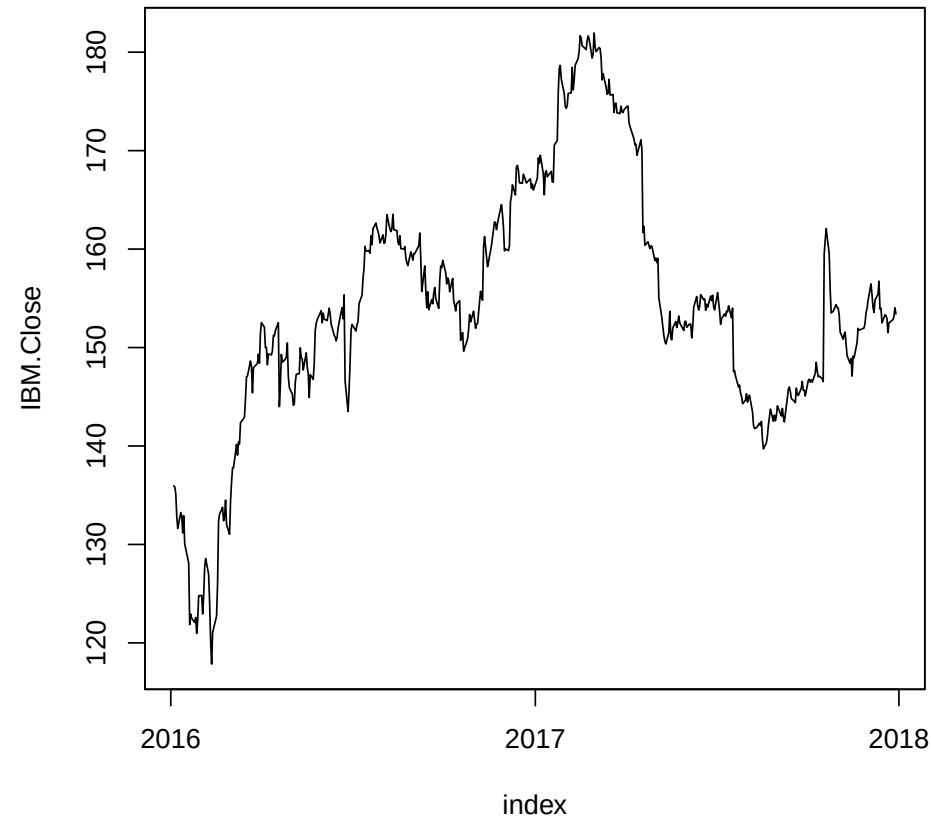
$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dw_t, \quad X_0 = x_0$$

ここで、 $t \in [0, \infty)$

- 微分積分学 $\Rightarrow$ 測度論（ルベグ積分論）
 $\Rightarrow$ 確率論 $\Rightarrow$ 確率解析（伊藤解析）

数理ファイナンス：株価

data with the original time stamps



- 確率微分方程式 (Black-Scholes モデル) で記述する：

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dw_t, \quad X_0 = x_0$$

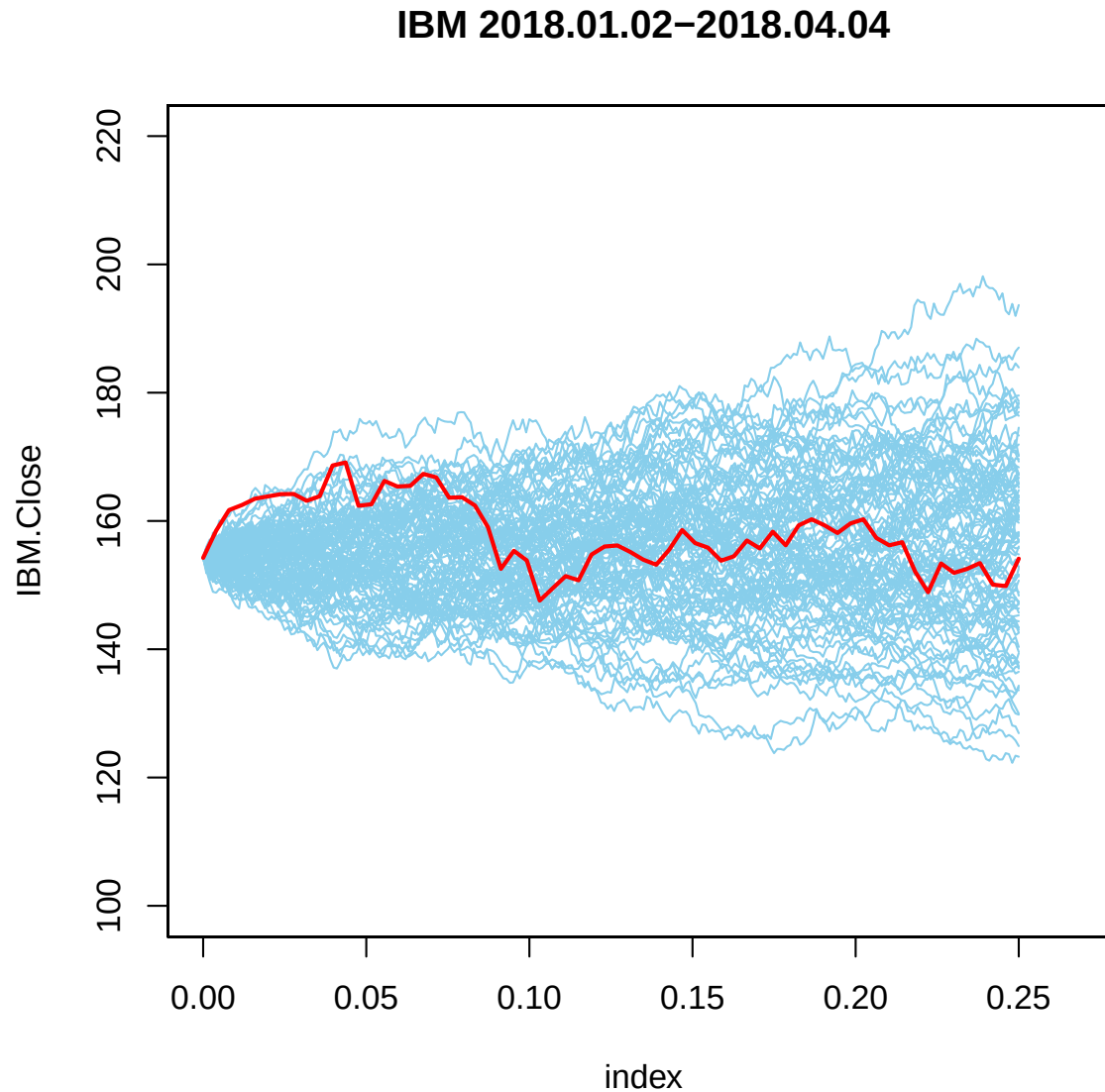
株価の予測

- データから株価の将来予測は可能か？
- 確率微分方程式 (Black-Scholes モデル) :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dw_t, \quad X_0 = x_0$$

- 未知パラメータ μ, σ をデータから推定する (学習する)
⇒ 確率過程の統計学
- 2016.01.04～2017.12.29 のデータからパラメータを推定
$$\hat{\mu} = 0.07668582, \quad \hat{\sigma} = 0.18820717$$
- 2018 年はじめから 3 ヶ月先までの株価のパスをシミュレーションで予測する ⇒ 確率数値解析

株価の予測：2018年はじめから3ヶ月先までの株価のパスをシミュレーションで予測



数学として

- 微分積分学 $\Rightarrow$ 測度論 (ルベーグ積分論)
 - $\Rightarrow$ 確率論 $\Rightarrow$ 確率解析 (伊藤解析)
 - $\Rightarrow$ 確率過程の統計学
 - 確率数値解析
 - 数理ファイナンス

金融工学：デリバティブ（派生証券）の価格付け問題

- 株価 X_t が確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dw_t, \quad X_0 = x_0$$

に従うとき、デリバティブ（エイジアンコールオプション）の価格を計算せよ：

$$C = E \left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T X_t dt - K \right)^+ \right]$$

- モンテカルロ法（計算時間、統計的誤差の問題）
- 漸近展開（高速、高精度）

$$C \sim c_0 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \cdots + \epsilon^k c_k \quad (\epsilon \downarrow 0)$$

モンテカルロ法で3ヶ月かかる計算が、10秒で可能に。

⇐ マリアバン解析（無限次元確率解析）

極限定理・漸近展開

ソフトウェア開発

数学として

- 微分積分学 $\Rightarrow$ 測度論（ルベーグ積分論）
 - $\Rightarrow$ 確率論 $\Rightarrow$ 確率解析（伊藤解析）
 - $\Rightarrow$ 確率過程の統計学
 - 確率数値解析
 - 数理ファイナンス
 - マリアバン解析（無限次元確率解析）
 - 極限定理・漸近展開
 - ソフトウェア開発

応用数理への誘い

- ここで紹介したものは、数学科で行なっている数学・数理科学研究の1つの例にすぎません。
- 皆さんの数学・数理科学への挑戦に期待しています。