

理学部数学科紹介

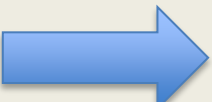


駒場キャンパス
数理科学研究科棟



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

数学科と数理科学研究科

- 1881年：理学部数学科 発足
- 平成4年(1992)：理学部と教養学部の子つの数学教室＋教養学部基礎科の数理コースが統合  「大学院数理科学研究科」
- 駒場の数理科学研究科に属する教員が、前期課程の数学、理学部数学科、大学院まで一貫して数学教育を担当している。

数理科学：数学自体とその諸科学との連携

- 数学自体：代数、幾何、解析の研究
- 連携：諸現象の数理解析 一例：感染症の数学モデル

東大数理/数学科の特徴

世界的研究者が多数教育に携わっている
選択できる専門分野が多種多様である
教員数約60名(代数・幾何・解析・応用数理)

国際研究集会などの学問的刺激が多い
外国人ビジター年間150名以上

図書 コンピュータなど勉学の環境

優秀な同級生/先輩後輩との切磋琢磨

東京大学理学部数学科出身の数学者



高木貞治(1875-1960)

類体論とヒルベルトの
問題(第9、第12問題)
の解決



小平邦彦(1915-1997)

複素多様体の研究、国
内初のフィールズ賞



伊藤清(1915-2008)

確率解析の創始
第一回ガウス賞受賞

現代数学の分野を大別すると

- **代数分野** 代数的な構造に問題を帰着して、問題をとらえる整数論、代数幾何、表現論など
- **幾何分野** 問題を図形的に扱う、微分幾何、トポロジー
- **解析分野** 関数の性質を問う、微分方程式論、関数解析
- **応用数理分野** 確率統計、数値解析、数理物理、数理生物、数理ファイナンス、数学基礎論、計算機科学、データサイエンス、数理モデリング。計算機の発展により大きな変化を遂げている。数学卒業生の需要は拡大している！

独創的な研究はこれらの分野にまたがることも多く、
これらの分野の境目がはっきりしているわけではない。

数学とは何か？

- 抽象化によって得られた概念と公理系の
論理的帰結を探求. 抽象化は概念や対象の
普遍的構造を抽出するから, 結論はきわめて
汎用的
- 「異なったものを同じものと見なす技術
(H. Poincaré)」
- 数理モデルを通じて現象の定量的・定性的理
解をもたらすという意味で, **科学の共通言語**



数学の研究？：近年解かれた数学の問題

- フェルマ予想 (1637)

A. Wiles (1995)

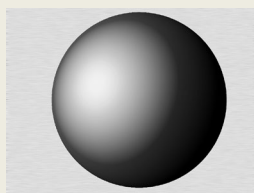
- ポアンカレ予想 (1904)

G. Perelman (2003)

単連結な閉じた3次元の図形は3次元球面

$$x^n + y^n = z^n$$

nが3以上のとき自然数解をもたない



$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}$$

鍵になる方程式，リッチフロー

数学の研究はタイムスパンが長い！

何が応用されるか予想つかない

- 線形代数・代数幾何・整数論
→ 符号・暗号理論
- 確率微分方程式 (1940年代)
→ 数理ファイナンス (1980年代)
- 非ユークリッド幾何 (1820頃)・リーマン幾何 (1854)
→ 相対性理論 (1905, 1915)

数学から数理科学へ

- 伝統的な物理学，工学，情報科学分野における数学の役割をこえて，数学と諸科学の融合研究分野が急速に拡大，その背景は**計算能力，観測力（データ獲得力→big data）の飛躍的増大によって数理モデルの定量化が進展**．数学科生の需要は急拡大している！
- 数理統計学，数理生物学、数理・計量ファイナンス、数理モデリング、データサイエンス etc.

理学部数学科での学習

- 2年生Aセメスター（代数と幾何，集合と位相，複素解析）基礎科目講義 + 演習
- 3年生（20世紀半ばまでに確立された現代数学の基礎）
基礎科目講義 + 演習 + 計算機実習
- 4年生 専門基礎のための数学講義
専門的な内容に関するセミナー
現代数学を概観するオムニバス講義

数学科卒業後の進路

	大学院進学	企業	学校等	官公庁	研究生	その他	合計
2016	31 (数理24)	4 (金融保険3、他1)	1	0	0	9	45
2017	33 (数理27)	2 (メーカー他2)	0	0	0	6	41
2018	25 (数理19)	5 (金融保険2、メーカー他3)	4	1	0	5	40
2019	29 (数理22)	4 (金融保険3、メーカー1)	0	0	1	11	45
2020	29 (数理19)	4 (金融保険3、他1)	1	0	0	14	48

大学院進学が多数をしめる(だいたい2／3強)

企業では**金融・保険**、**IT系**など専門職、教員就職が多い

修士修了後の進路

	博士課程進学	企業	学校等	官公庁	その他	合計
2016	23 (数理23)	10 (金融保険5、他5)	1	0	3	37
2017	21 (数理21)	13 (金融保険7、他6)	0	0	3	37
2018	21 (数理21)	21 (金融保険6、他15)	0	0	7	49
2019	18 (数理17)	12 (金融保険4、他8)	0	0	2	32
2020	19 (数理18)	6 (金融保険5、他1)	1	1	8	35

博士課程で**研究者/専門職**をめざす者と就職する者が約半数ずつ

アカデミア以外での博士への需要もたかまっている。

参考：数学科パンフレット(2021年度版)

<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/sugakuka2021.pdf>

数学科のガイダンス

- 5月19日(木) 18:45～20:30 Zoom

数学科の紹介 ～ 現代の数学, 未来の数学

代数、幾何、解析、応用数理の専門家がそれぞれの分野
を語る！

数学パワーを通じてあらゆる分野で,
世界に貢献してることが可能！

代数学の紹介

伊山 修

東京大学大学院数理科学研究科

2022 年 5 月 19 日 数学科ガイダンス

代数学とは何か

元々の意味は、
数の代わりに文字を用いてたてた方程式の解法を研究する学問。

近代以降では、
「数の体系」（代数系）を調べる学問。

但し、「数の体系」とは、整数、有理数、実数、複素数に限らず
「何らかの演算の入った集合」のこと。

また、「数の体系」が「別の (演算の入った) 集合」に作用する様子を
調べることもよく行われる。

更に、現代では、
代数学の概念は数学の他の分野や諸科学にも自然に現れ、
また、代数学は幾何学、解析学の手法や考えとも結びついて発展している。

代数学とは何か

例. 1年生の講義で学んだ「線型代数学」は代数学の一部.

例えば, $\mathbb{R}$ 上の線形空間 V や, V 上の線型変換 $V \rightarrow V$ を考えた.

$\mathbb{R}$: 実数全体の集合 (四則演算が入った「数の体系」),

線形空間 V : 和, 差が入った「数の体系」. 更に $\mathbb{R}$ が V に作用する.

V 上の線型変換全体の集合: 和, 差と「合成」という演算を持った「数の体系」で, それは V に作用する.

例. 2年生の講義で学んでいる「常微分方程式」は解析学の一部.

同次 (斉次) の線型常微分方程式の解全体は線形空間をなす.

代数学科目の紹介

2 年 A セメスター

代数と幾何：線形代数の復習とその続き。

但し，抽象的概念を重視する。

代数と幾何演習：「代数と幾何」に対応した演習。

3 年では基本的な「数の体系」である群，環，体について学ぶ。

群：乗法，除法（または加法，減法）が入った集合。

環：加法，減法，乗法が入った集合。

体：加減乗除が入った集合。

3 年 S セメスター

代数学 I：群論および環論の初歩を学ぶ。

代数学特別演習 I：「代数学 I」に対応した演習。

3 年 A セメスター

代数学 II：環論の続き，環上の加群を学ぶ。

代数学 III：体論（ガロア理論）を学ぶ。

代数学特別演習 II：「代数学 II」に対応した演習。

代数学科目の紹介

4 年以降

ホモロジー代数, リーマン面・代数曲線論 / 代数的整数論, 可換環論の講義が隔年で行われる.

その他, 専門的な講義が行われる.

セミナー

3 年 A セメスター: 数学輪講

4 年 S セメスター: 数学講究 X A

4 年 A セメスター: 数学特別講究

いずれも数学の専門書を何人かの学生で読むセミナー.

もちろん, 代数学関連の本を選ぶこともできる.

大学院に入ってもセミナーは続く.

他にも, 専門家が研究発表を行うセミナーや研究集会もある.

セミナーは大変重要. 数学科 4 年, 数理科学研究科における生活の重要な部分を占める.

代数幾何学

多項式で定義された図形を調べる分野。複素解析，微分幾何，トポロジーの手法も取り込んで発展している。

高次元代数多様体，導来圏， $K3$ 曲面，カラビ・ヤウ多様体，ファノ多様体，特異点，モチーフ，代数的サイクルと代数的 K 理論，正標数の代数幾何。

数論

代数的整数論やガロア理論，保型形式の理論， p 進数の理論などが結びつき，代数幾何学の手法を取り入れて数論幾何学として発展している。

ガロア表現，分岐理論，類体論の高次元化，ラングランズ対応， p 進ホッジ理論， p 進微分方程式。

表現論

対称性を線形代数的な手法を使って分析する方法論を扱う分野。数論，数理論理，幾何学など様々な分野からの影響を受けて発展している。

古典群の表現とヤング図形，それに付随する組み合わせ論的な構造，実および p 進簡約群の表現，簡約群のモジュラー表現。

環論

環を調べる研究分野。可換環の理論は，代数幾何学の局所理論とみなすことができる。非可換環の研究では，加群圏や導来圏の構造を分析する。

正標数の可換環論，整環の表現論，簍の表現論，団代数とその圏化。

最後に

代数学のどの分野においても線形代数，群論，環論，体論は必須。
従って，3年生までに習う線形代数，群論，環論，体論を
きちんと習得することがまず大事。

幾何学的考察も重要。時には解析学も必要。
従って，どれも勉強することが望ましい。

また，授業で学ぶことだけでなく，セミナーや自主学習により
積極的に勉強を進めていって欲しい。
(代数幾何学，整数論，ホモロジー代数，表現論の初歩など)

数学科の授業はほとんど数学のみ。

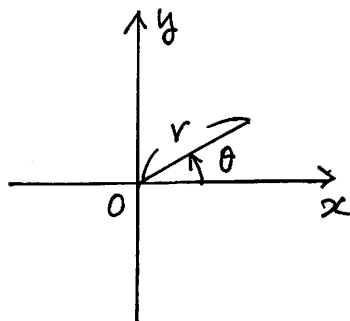
実験はないが，演習がその代わりにある。セミナーもある。
授業時間以外にも数学を考える時間がたくさん必要。
時間をかけて数学をつきつめて考えることには苦労も多いが，
そこに楽しみを見いだせる人は数学科に向いていると思う。

ありがとうございました！

2022年5月19日(木)

数学科ガイダンス幾何の説明

(担当, 文責: 河澄)

参考書: 「数学の現在Ⅱ」 東大出版会◎ 局所 (local) と大域 (global)例 (平面極座標) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (= \frac{\partial \theta}{\partial x})$$

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (= \frac{\partial \theta}{\partial y})$$

局所: (可積分条件) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ となる $(\because \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \theta}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \theta}{\partial x}))$
 1カL.

大域: 角度 $\theta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 全体で連続に定義することはできない

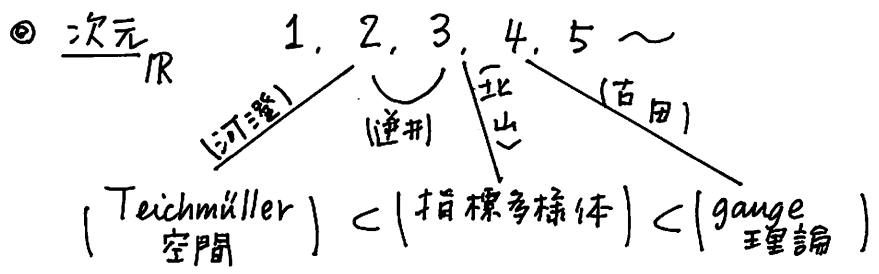
$\xrightarrow{\text{よの苦しみ}}$ $H_{DR}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R} \neq 0$ de Rham cohomology

M : C^∞ 多様体 (微積分がでる位相空間) には $\mathbb{R}$ 上の第 q de Rham cohomology 群

$$H_{DR}^q(M), \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad \leftarrow \text{実 vector 空間}$$

が定義して M の大域的な情報を与えている

$$H_{DR}^q(M) = 0 \quad \text{if } q \neq \dim M$$



④ M : 2次元向き付け可能連結閉 C^∞ 多様体 "閉曲面"

$$H_{DR}^1(M) \cong \mathbb{R}^{2g}, \quad g: \text{種数 (genus)}$$

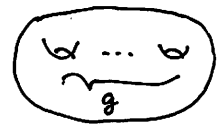
$g=0$



$g=1$



$g \geq 2$



M は g で分類できる
(← 表面だけを考える)

これは G/K

$\Gamma \backslash G$

$\Gamma \backslash G/K$

という形をしている

ただし, G : Lie 群, $K \subset G$: 閉部分群, $\Gamma \subset G$ 離散部分群

より一般に $\Gamma \backslash G/K$ の研究 (小林, 吉野, 大島)

Lie 群 G は 幾何 による「表現」される

"tropical geometry"
多様体のつづかれた先に現れる

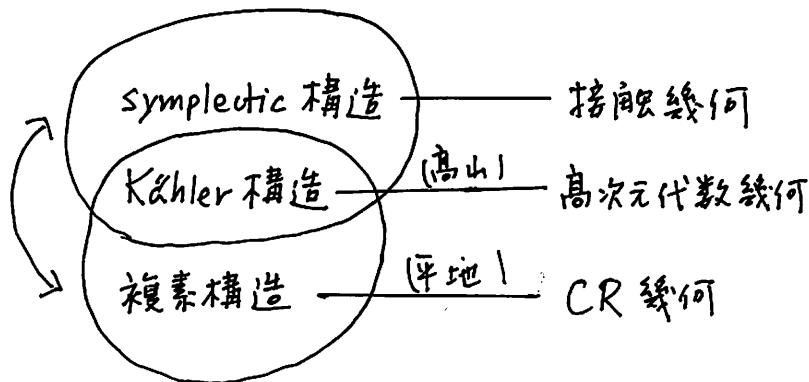
他方, 2次元の M には $Kähler$ 構造が入る

さまざまな次元で

特異点論

↑
局所と大域の
せめぎあう場所

mirror
symmetry
(植田)



◎ 力学系 (木)

flow (ODE) の研究

葉層構造 (足助)
(PDE)



◎ 幾何と表現論と物理の相関 (中島, 松尾, Milanov, 山崎)

◎ 多くの研究の背景に物理がある

→ 量子群, 共形場理論, T 点作用素代数

Kavli IPMU (専任) 中島, Milanov, 山崎 (兼任) 小林

離散群, ツリー, ユニタリ表現の周辺

ミダ よしかた
木田 良才

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

2

$$H = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \} \quad \text{上半平面}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : H \rightarrow H$$

行列の積と両立す:

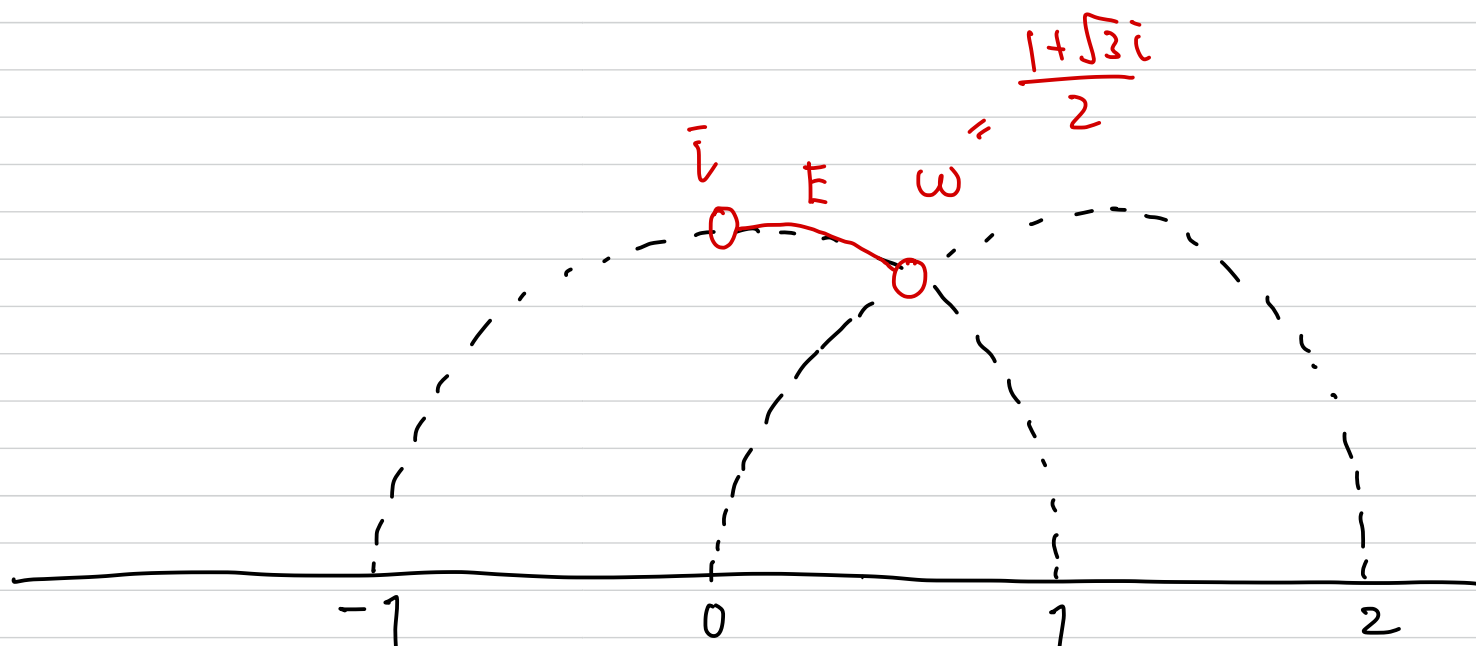
$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

$$A(Bz) = (AB)z.$$

一次分数変換

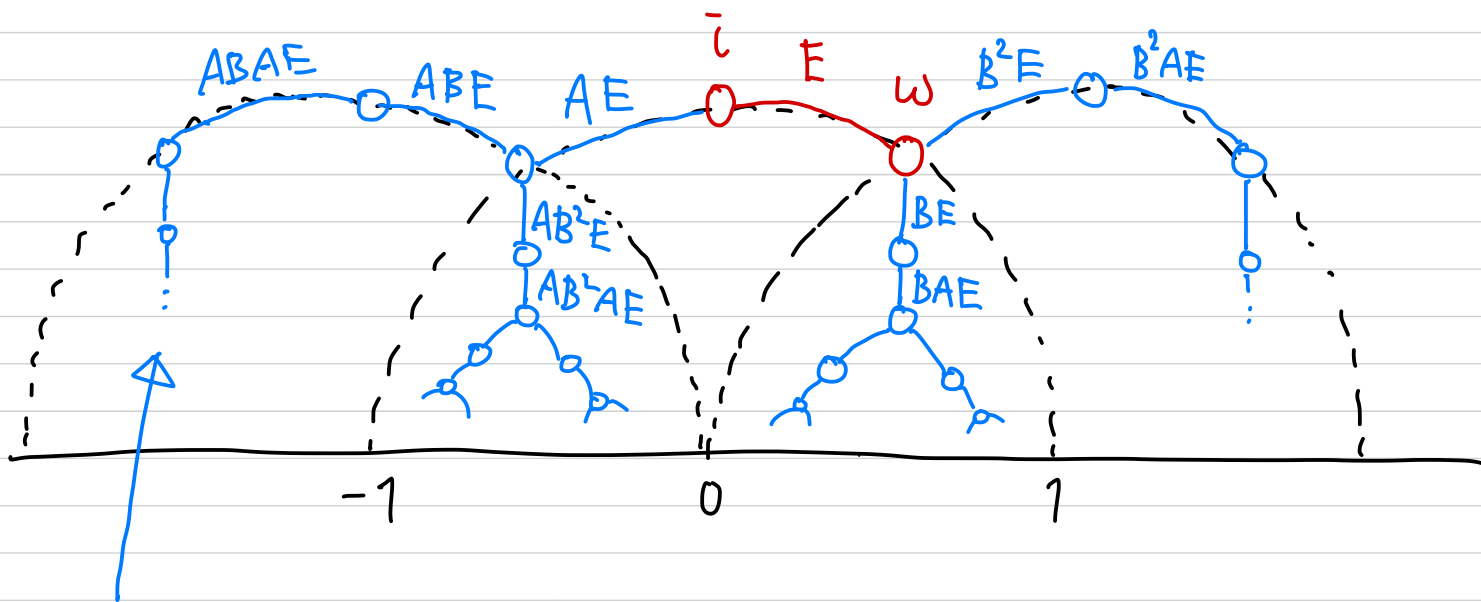
$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

$SL_2(\mathbb{Z})$ の π を E を $\mathbb{H}$ に写す。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

$$A i = \bar{i} \quad , \quad B \omega = \omega$$



T : ツリー (i.e. 頂点を根から見た図形で **輪** の存在しない)

$SL_2(\mathbb{Z})$ は ツリー T に作用する.

Bass-Serre 理論 によらる. 群 G に対し.

G の分解 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow} G$ の ツリーへの作用
(自由積など)

$$\longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{*} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \left(= \langle A \rangle *_{\langle -I \rangle} \langle B \rangle \right)$$

cf. J.-P. Serre, Trees, Springer.

定理

$SL_3(\mathbb{Z})$ の ツリ- T の作用は必ず不動点をもつ.

→ $SL_3(\mathbb{Z})$ は 3 以上分解できない.

- ツリ-の幾何と $SL_3(\mathbb{Z})$ の代数による証明あり.

- (綿谷, 1982)

$SL_3(\mathbb{Z})$ の **ユニタリ表現** がもつ特性を用いた証明.

(Kazhdan's property (T))

→ より広いクラスの群に対する統一的な証明.

Kazhdan の 定理 (1960年代)

ある種のリー群の格子部分群が有限生成である
ことを示したが、 $\mathbb{Z}$.

格子部分群の例 $\mathbb{Z}^n < \mathbb{R}^n$

$$SL_n(\mathbb{Z}) < SL_n(\mathbb{R})$$

最近の発展 $F_n = \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_n$ 自由群

$n \geq 5$ のとき. $\text{Aut}(F_n)$ は property (T) をもつ.

$\left(\begin{array}{l} \text{Kaluba - 小沢 - Nowak, 2019} \\ \text{Kaluba - Kielak - Nowak, 2021} \end{array} \right)$

- コンピュータ - を使った (rigorous 証明) 証明
- human proof はまだない.

2022年5月19日（木） 18:45
理学部数学科ガイダンス
@zoom

応用数理について

大学院数理科学研究科 新井 敏康



数学科と 数理科学 研究科

1992年に、理学部と教養学部の二つの数学教室と、教養学部基礎科学科の数理コースが合体して、独立研究科「大学院数理科学研究科」が発足した。数理科学は、数学と諸科学との連携をふくむより広い概念。この「**諸科学との連携**」の要となるのが**応用数理**。

駒場の数理科学研究科に属する教員が、前期課程の数学、理学部数学科、大学院まで一貫して数学教育を担当している。

「応用数理」とは？

数理科学研究科は、数学を中心にその周辺を数理科学としてとらえ、それを一つの総体として研究することを目指している。代数学・幾何学・解析学が数学の三つの柱であるとする、それらを取り巻く広大な数理分野を対象としているのが数理科学である。

したがって応用数理の存在が「数学」と「数理科学」を分けているともいえる。

応用数理グループでは、この趣旨に沿って、種々の現象に対する数学モデル、および数学モデルの数学的性質を対象にして研究活動を活発に行なっている。これは既成の数学を「応用する」ということではない。実際の現象に対する数学的モデルを作り、必要な新しい数学の理論を構築していくことが本質的な活動である。

その具体的研究内容は多岐にわたるため、すべて網羅することは不可能である。ここでは、現在のスタッフが取り組んでいる研究を4つの分野に大別して紹介しておく。

1. 応用数理・現象数理：数値解析，可積分系，量子統計，場の量子論・弦理論・数理生物学など
2. 確率統計：確率解析学，統計科学，統計力学，数理ファイナンス など
3. 計算機科学：型理論，プログラム言語論，圏論など
4. 数学基礎論：証明論など

環境変動：数学から数理科学へ

- 伝統的な物理学，工学，情報科学分野における数学の役割をこえて，数学と諸科学の融合研究分野が急速に拡大，その背景は計算能力（機械学習やAI），観測力（データ獲得力→big data）の飛躍的増大によって数理モデルの定量化が進展．数学科生の需要は急拡大している！
- データサイエンス，数理生物学・数理医学・数理経済学・数理ファイナンス・数理社会学, etc.
- 現象に触発された応用数理といえども，すぐに役立つ数学をもとめているわけではない。実際，なにが応用されるかは予想がつかない。確率微分方程式は1940年代に提起されたが，数理ファイナンスに応用されたのは1980年代であった。

応用数理とヒルベルトの問題

- 1900年パリにおいて開催された第2回国際数学会議において、ヒルベルトが提出した23の未解決問題の一つ
- 17問題：実係数多変数多項式が正定ならば、いくつかの有理式の二乗和として表せるか？

ここで実係数の有理式 $f(x_1, \dots, x_n)$ が正定であるとは、
 $f(a_1, \dots, a_n)$ が任意の実数 $a_1, \dots, a_n$ について負にならないこと。

17問題の解決

- アルティンはシュライアーとともに実閉体の理論を新しく作って, ヒルベルトの17問題を肯定的に解決(1927).
- F が実閉体 であるとは, F で四則演算 $+$, $-$, $\cdot$, $^{-1}$ ができて順序 (大小関係) $<$ があり, 多項式 $p(x)$ について中間値の定理が成り立つこと.

ここでいう中間値の定理は, $a < b$ で $p(a)p(b) < 0$ ならばある $a < c < b$ で $p(c) = 0$ が成立すること.

実数 $R = F$ が正に実閉体の例.

タルスキのアルゴリズム

- タルスキは数学基礎論（モデル理論, 集合論, etc.）の研究者で, 実閉体の理論を受けて, つぎのようなアルゴリズムをつくった(1948)：

任意に与えられた実閉体の命題の真偽を決定する

このタルスキによるアルゴリズムを用いれば, 実係数多項式に関する問題は, 原理的には機械的に解くことができる.

アルゴリズムの改良版が実装されて, 数式処理システム (Mathematica, Maple, Wolfram Alpha) の背後で動いている.

本格的な応用数学で最も重要なのは

体系的な数学の知識

体系的な数学とは？

理学部数学科の2, 3, 4年の講義

さらに

現象とその背後にある理論への興味

応用数学を志す皆さん, 数学科でお待ちしております。