（別紙様式５）

変革を駆動する先端物理・数学プログラム（FoPM）

国外連携機関長期研修　報告書

氏　　名	星屋陽俊
所属部局	数理科学研究科　数理科学専攻
受入先	LMU Munich
日程	西暦 2025 年 10 月 31 日　～　西暦 2025 年 11 月 17 日

LMU Munich に滞在し,数理物理,スペクトル理論,散乱理論,偏微分方程式に関する研究を行なった.特に,非自己共役シュレーディンガー作用素に対する Lieb-Thirring 不等式と,シュレーディンガー方程式に対する分散型評価に関する研究で進展があった.

滞在中は,Rupert Frank 氏と上記の内容について議論し,多くの知見を得た.特に,非有界なポテンシャルの影響で下半有界ではない自己共役作用素に関して,複素数値ポテンシャルを摂動として加えた時の,離散スペクトルの評価に関しては,様々な気づきがあった.そのうちの一つとして,Knapp counterexample の散乱理論的な解釈が挙げられる.ユークリッド空間から球面へのフーリエ制限作用素の,ルベーグ空間における有界性は,Stein-Tomas の定理として知られているが,そこで指数の optimality を示す際に用いられるのが Knapp counterexample である.通常は,不確定原理に基づいた意味づけがなされる.この例は,[2]において,Laptev-Safronov conjecture の反証を与える際にも重要な役割を果たす.今回の気づきのポイントは,量子定常散乱理論とフーリエ制限作用素を結びつけるために,フーリエ拡張作用素をポアソン作用素と解釈することと,定常散乱行列と古典力学的散乱粒子の軌道の対応を見ることにある.ここで,ポアソン作用素は,ユークリッド空間の radial compactification の境界から内部への作用素で,楕円型境界値問題の解を与える.古典力学的散乱も,この空間の境界上の写像として考える.この考え方の利点としては,双曲エンドを持つ(非捕捉的)多様体上のラプラス作用素や,2 次の斥力ポテンシャルを伴うシュレーディンガー作用素に対して,一様ソボレフ評価またはストリッカーツ評価を考えた時に,指数の制限が弱くなることの古典力学的な説明ができる点にある.そこでも,古典的粒子の散乱を,コンパクト化した空間の境界上の写像として見るのが重要である(散乱理論ではよく知られた考え方である).詳細は,執筆中の論文で紹介するかもしれない.また,Frank 氏と議論した際に,今後取り組む予定の問題にコメントをもらったり,研究テーマを提供してもらえたのも,重要な進展であった.

別の進展として,量子多体問題に関して,Phan Thanh Nam 氏から未解決問題を多数紹介してもらえたことが挙げられる.一部の問題は,散乱理論の手法が応用できそうな雰囲気があるので,今後の課題とする.普段日本にいると,耳にすることがない問題に触れることができたのは貴重な体験になった.

11 月 5 日には,解析セミナーで講演した.内容は,今年度出版された論文[1]と,現在執筆中の論文に基づく.セミナーには,20～30 人ほどの聴講者がおり,多くの人に研究成果を知ってもらうことができた.また,翌週には,同セミナーで Frank 氏の講演を聴講することができた.内容は述べないが,日本では研究者が少ないスペクトルに関する問題の入門的なレクチャーで,勉強になった.

[1] A.Hoshiya, Uniform Resolvent and Orthonormal Strichartz Estimates for Repulsive Hamiltonian, Ann.Henri Poincare (2025)
[2] S.Boegli and J.C.Cuenin, Counterexample to the Laptev-Safronov Conjecture, Commun.Math.Phys.(2022)

