

ポアンカレ予想



数理科学研究科 名誉教授 松本 幸夫



アンリ・ポアンカレ (1854--1912)

- 1) **アンリ・ポアンカレ (1854～1912)** は19世紀後半から20世紀初頭にかけて活躍した大数学者です。ポアンカレは多くの研究をしましたが、そのなかに、19世紀の数学者リーマン (1826～1866) の生み出した空間概念「多様体」の全体的な「かたち」を研究するための理論的な道具を整備した仕事があります。「基本群」の理論と「ホモロジー論」の2つがそれぞれですが、これが新しい数学「トポロジー (位相幾何学)」の現代的な出発点となりました。
- 2) **ポアンカレ予想とは：**ポアンカレは現代的なトポロジーの出発点となった前述論文の最後に「単連結な閉じた3次元多様体は3次元球面だけか」という問題を提起しました。1904年のことです。これが有名な「ポアンカレ予想」と呼ばれる予想です。この予想の自然さは閉曲面を考えると分かります。多様体の言葉で言うと、閉曲面は「閉じた2次元の多様体」ですが、そのなかで、単連結なものは2次元球面に限ります。ここで、ある曲面が「単連結である」とい

うのは、その曲面のうえに任意の「閉曲線」を描いたとき、その閉曲線を曲面上で滑らせていって、1 点にたぐりよせることができる、ということです。閉曲面はすべて分類されていますので、その分類表を眺めると、単連結な閉曲面は 2 次元球面（つまり普通の球面）に限ることが了解されます。3 次元で同じことが言えるか、と問うているのがポアンカレ予想です。

3) **トポロジーの発展**：この予想は、それが提起された 20 世紀初頭には、解くべき重要な問題として研究者の目標になることはなかったと思われます。ポアンカレ自身が「整備」したはずの「ホモロジー」の理論も、まだ多分に直観的で、あちこちに「穴」がありました。20 世紀の前半は、ポアンカレ予想の解決を目指すというより、むしろトポロジーの基礎理論を十分に発展させることに研究者の努力がそそがれました。このころ、「ホモロジー論」「コホモロジー論」「ホモトピー論」「多様体」の理論などが発展しました。これらの成果の上に立って、1950 年ころを境に、「高次元多様体」の理論が爆発的に進展しました。

4) **低次元へのシフト、微分幾何学との融合**：1960 年にスメール (1930 ~) により 5 次元以上の多様体について「一般化されたポアンカレ予想」が解決されたことは、それを象徴する出来事です。高次元の理論が一段落したあと、1970 年ころから 3 次元、4 次元のいわゆる「低次元多様体」へと研究者の関心がシフトし、同時に多様体上の「幾何構造」の重要性が認識されるようになり

ました。トポロジーと微分幾何学を融合する流れが生じ、「3 次元多様体は双曲幾何を含む 8 種類の幾何学に分解できる」という **サーストン (1946 ~)** の「幾何化予想」が、ポアンカレ予想を含む大予想として浮かび上がって来ました。**ペレルマン (1966 ~)** は微分幾何を駆使して、幾何化予想を解決したのです (2003 年ころ)。