理学部数学科紹介

駒場キャンパス
数理科学研究科棟

東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

理学部数学科ガイダンス
2024年4月24日　数理棟大講義室

学科長　会田茂樹

代数学　小木曽啓示

幾何学　葉廣和夫

解析学　宮本安人

応用数理　吉田朋広

数学科と数理科学研究科

- 1877年:東京大学創設

  数学物理学及び星学科 設置

- 1881年 ： 理学部 数学科 発足
- 1992年: 大学院数理科学研究科 発足

（本郷の理学部数学科と駒場の教養学部の数学教室＋教養学部基礎科の数理コースが統合）

純粋数学(代数、幾何、解析)･**応用数理**

駒場キャンパスを本拠地とし、東京大学の数学部門が統合し，前期課程の数学，理学部数学科，大学院まで一貫して数学教育を担当している.

東大の数学科の特徴
（大学院数理科学研究科）

世界的数学者が駒場キャンパスに集合し
君たちを待っている
代数・幾何・解析・応用数理の
数学者が約60名

数学は国際的な学問
（宇宙人とでも「数学」ならば話が通じるかも）

世界中の天才・歴史上の人物　との切磋琢磨

東京大学理学部数学科出身の数学者

高木貞治（1875-1960）

第一回フィールズ賞授賞委員
類体論とヒルベルトの問題(第９、第１２問題)の解決

小平邦彦（1915-1997）

複素多様体の研究、国内初のフィールズ賞

伊藤清（1915-2008）

確率解析の創始
第一回ガウス賞受賞

現代数学の分野を大別すると

- 代数分野　代数的な構造に問題を帰着して、問題をとらえる整数論、代数幾何、表現論など
- 幾何分野　問題を図形的に扱う、微分幾何、トポロジー、対称性の数学、リー群論・表現論など
- 解析分野　関数の性質を問う、微分方程式論、関数解析
- 応用数理分野　確率統計、数値解析、数理物理、数学基礎論、計算機科学、データサイエンス、数理モデリング等

独創的な研究はこれらの分野にまたがることも多く、これらの分野の境目がはっきりしているわけではない。

数学とは何か？

- 数学は厳密な論理で証明された永遠の真理
- 対象の普遍的構造を抽出した概念を土台にし、結論はきわめて汎用的
- 数学は科学の共通言語（←数理モデル）

神は幾何学者である（プラトン）

数学とは異なったものを同じとみなす技術である(ポアンカレ)

正しい見方をすれば、数学は真実だけでなく、最高の美を有する（ラッセル）

数学の研究はタイムスパンが長い！

- フェルマ予想 (1637)

  谷山-志村(1950年代)

  A. Wiles(1995)

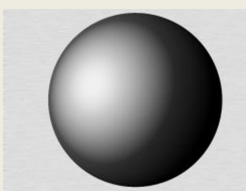
$$x^n + y^n = z^n$$

nが3以上のとき自然数解をもたない

- ポアンカレ予想(1904)

  G. Perelman (2003)

  単連結な閉じた3次元の図形は3次元球面



$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}$$

- 空間形予想

  定曲率の閉じた高次元空間の存在問題 （未解決！）

  Clifford, Klein (1891), Wolf, 小林 (20世紀後半)

何が応用されるか予想つかない

- 線形代数・代数幾何・整数論

  → 符号・暗号理論

・積分幾何学(1920年代)

  →ノーベル医学賞(1979)や地質探査

- 確率微分方程式 (1940年代)

  → 数理ファイナンス(1980年代)

- 非ユークリッド幾何 (1820頃)・リーマン幾何 (1854-)・ 擬リーマン幾何学

  → 相対性理論 (1905, 1915)

社会における数学

- 数学的思考力・本質を見抜ける力をもった学生の需要が社会において増大している。
- 物理学，工学，情報科学分野における土台としての数学の役割に加え、AIやBig Dataの分析にも数学が土台となっている。
- 数理統計学，数理・計量ファイナンス、数理モデリング、データサイエンス etc.

理学部数学科の必修科目

- ２年生Aセメスターの必修科目 （代数と幾何，集合と位相，複素解析学I）　　（講義 ＋ 演習）
- ３年生の必修科目　（講義＋演習）
  代数学I　（群論と環論）、
  幾何学I　（多様体論），
  解析学IV （ルベーグ測度と積分）、
  複素解析学II （複素解析学Iの進んだ内容）
- ４年生の必修科目
  教員の個別指導による本格的なセミナー
  現代数学を概観するオムニバス講義

数学科卒業後の進路

年度	大学院進学	企業	学校等	官公庁	研究生	その他	合計
2017	33 (数理27)	2 (メーカー他2)	0	0	0	6	41
2018	25 (数理19)	5(金融保険2, メーカー他3)	4	1	0	5	40
2019	29(数理22)	4(金融保険3, メーカー1)	0	0	1	11	45
2020	29(数理19)	4(金融保険3, 他1)	1	0	0	14	48
2021	30(数理23)	2(金融保険1, 他1)	1	1	0	9	43
2022	40(数理25)	5(金融保険3, 他2)	0	0	0	3	48

- 大学院進学が多数をしめる(だいたい2/3強)
- 企業では金融・保険, IT系など専門職,
- 公務員では, 官僚・教員への就職が多い

修士修了後の進路

年度	博士課程進学	企業	学校等	官公庁	その他	合計
2017	21(数理21)	13(金融保険7, 他6)	0	0	3	37
2018	21(数理21)	21(金融保険6,他15)	0	0	7	49
2019	18(数理17)	12(金融保険4,他8)	0	0	2	32
2020	19(数理18)	6(金融保険5,他1)	1	1	8	35
2021	19(数理18)	11(金融保険5,他6)	0	1	4	35
2022	28(数理27)	13(金融保険6,他7)	0	1	5	47

- 博士課程で研究者/専門職をめざす者と就職する者が約半数ずつ
- アカデミア以外での博士への需要も高まっている。
- 数学科パンフレット：https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/summary/pamphlet.html

博士修了後の進路

年度	ポスドク	企業	助教	教員	その他	合計
2017	19	3	2	0	0	24
2018	21	4	3	0	0	28
2019	19	2	2	0	0	23
2020	8	1	1	0	7	17
2021	8	5	1	0	6	20
2022	8	5	0	0	2	15

各分野の紹介

代数学　小木曽啓示

幾何学　葉廣和夫

解析学　宮本安人

応用数理　吉田朋広

代数学の紹介

小木曽啓示

- **加減乗除の四則に代表される演算を基礎とする分野.**
- **「数の体系（代数系）」＝「何らかの演算の入った集合」の性質やそれに関連した問題を扱う.**
- **代数学の概念は数学の他の分野や諸科学にも自然に現れ，代数学は幾何学，解析学の手法や考えとも結びついて発展している.**
- **集合の個々の元というよりは構造の備わった集合を考察の対象とし、（一般性を持った）概念を通じて考えることが多い。**（後にその一端を紹介）

- 数の体系の例：
- 整数の集合**Z**（和，差，積）
- 有理数の集合**Q**，実数の集合**R**，複素数の集合**C**（四則演算）．
- ～1 年生の講義より～
- n 次正方行列全体のなす集合（和，差，積）
- 平面ベクトル全体のなす集合，**R** 上の線形空間V（和，差，実数倍）
- V の線型変換全体の全体のなす集合（和，差，合成）．V に作用.
- ～2 年生の講義より～
- 同次(斉次) の線型常微分方程式の解全体は線形空間をなす.

代数学の研究分野

- 数論： 整数に関連した問題を扱う.
- 代数幾何学： 多項式で定義された図形を調べる.
- 表現論： 対称性を線形代数的な手法を使って分析する.
- 群論・環論・組み合わせ論など.
- 幾何，解析，理論物理，計算機科学など他分野との結びつきも深い.

カリキュラム（代数関係）

2 年

- 代数と幾何（＋演習） 抽象線形代数学

3 年

- 代数学I（＋演習） 群論（加減あるいは乗除の体系）と環論の初歩
- 代数学II（＋演習) 環論（加減乗の体系）, 環上の加群
- 代数学III（選択） 体論（加減乗除の体系）, ガロア理論
- 輪講（選択） 数論，代数幾何学，表現論などの入門的教科書を読む。

4 年

- テキストセミナー（数学の専門書を先生の指導の下読む）
- ホモロジー代数，リーマン面・代数曲線論/ 代数的整数論，可換環論（隔年で開講）
- その他，専門的な講義 (ほとんどは大学院生と共通).
- **セミナーは大変重要．4 年における生活の重要な部分を占める**

代数学の一例：

代数幾何学のさわりから

集合Λで添え字付けられた多項式からなる連立方程式系

$F_\lambda(x_1, \cdots, x_n) = 0$（λはΛの元全体にわたる）

の解全体Vを考える。

例：$x^n + y^n - z^n = 0$　（ひとつの方程式）

多項式の係数を整数にして解の範囲も整数にすれば整数論（不定方程式論）

多項式の係数は複素数も許して解の範囲も複素数で考えときの図形Ｖの研究は複素代数幾何学

観点に違いはあるがすでに類似がみられる。

（問題）定義方程式は無限個必要か？

（問題１）V は有限個の多項式からなる連立方程式系

$$g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \ (j = 1, 2, \cdots, m)$$

の形に書けるか？

（問題２）より強く, V は $f_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)(\lambda \in \Lambda)$ の中の有限個の多項式 $f_{\lambda_k}(x_1, x_2, \cdots, x_n)(\lambda_k \in \Lambda,\ k = 1, 2, \cdots, M)$ からなる連立方程式系

$$f_{\lambda_k}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, M)$$

の形に書けるか？

代数学からのアイデア：（目的に逆行して）方程式系をまず目いっぱいたくさんにすることで環とイデアルの問題に翻訳する（新しい概念は問題解決の１つの視点を与える）：

$f_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 達の多項式係数の一次結合

$$g_1 f_{\lambda_1} + \ldots + g_k f_{\lambda_k} \ (\lambda_i \in \Lambda\ ,\ g_i \text{ は多項式})$$

を方程式系に付け加えても V は変わらない。

R を可換環 (0 と 1 を持ち交換、結合、分配則をみたす加減乗法の備わった集合）とする。R の部分集合 I が、0 を含みしかも I の元の R 係数一次結合をとる操作で閉じているとき I を R のイデアルという。

R の元 $r_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ の R 係数一次結合の形に書ける元全体は R のイデアルをなす。$(r_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ とかく。

$S = A[x_1, \ldots, x_n]$ を可換環 A の元を係数とする n 変数の多項式全体の集合とする。多項式の通常の加減乗法により S は可換環をなす（A 係数 n 変数多項式環)。

A を $\mathbb{C}$ または $\mathbb{Z}$ とするとき、最初の問題は次の問題になった：

（問題 1）S において $(f_\lambda | \lambda \in \Lambda) = (g_1, \ldots, g_m)$ となる $g_1, \ldots, g_m \in S$(有限個) があるか？ すなわち、S のイデアルはすべて有限生成か？

（問題2）S において $(f_\lambda | \lambda \in \Lambda) = (f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_M})$ となる $\lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \Lambda$(有限個) があるか？

代数の問題：一般には代数だけで解けるわけではないが、この問題は代数の威力が見事に発揮されて、次の形で解ける（Hilbert):

任意のイデアルが有限生成である可換環のことを**ネーター環**という。

定理（ヒルベルトの基定理） 可換環 R がネーター環であれば $R[x]$ もネーター環である。

証明は代数学 I あるいは代数学 II で学ぶ。証明に込み入った計算は全く出てこない。(イデアルの列の ACC 性に着目することが証明の核となる。ACC 性の観点は形を変えて現代数学でもしばしば登場する。)

$R[x_1, x_2] = R[x_1][x_2]$, $R[x_1, x_2, x_3] = R[x_1, x_2][x_3]$, $\ldots$ (多項式の一文字整理) だから、定理より、R がネーター環ならば、$R[x_1]$, $R[x_1, x_2]$, $\ldots$ は順次ネーター環となる。すなわち

系（ヒルベルトの基定理） 可換環 R がネーター環であれば n 変数多項式環 $R[x_1, \ldots, x_n]$ もネーター環である。

最初の問題（問題１）は $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{C}$ はネーター環かという問題に帰着された：

練習問題１ $\mathbb{Z}$ のイデアルはすべて (m) の形で、$\mathbb{C}$ のイデアルは (0) と (1) の２つ。特に $\mathbb{Z}$ も $\mathbb{C}$ もネーター環。

これで問題１が解決できた。問題２は、問題１の結果から、以下のように解決できる。

各 $g_i(1 \le i \le m)$ は有限個の $f_{\lambda_{ij}}(\lambda_{ij} \in \Lambda, 1 \le j \le n_i)$ の S 係数一次結合の形。従って、

$$(f_\lambda | \lambda \in \Lambda) = (g_1, \ldots, g_m) \subset (f_{\lambda_{ij}} | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n_i) \subset (f_\lambda | \lambda \in \Lambda)$$

である。故に

$$(f_\lambda | \lambda \in \Lambda) = (f_{\lambda_{ij}} | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n_i)$$

である。(ACC 性に着目した別証明もできる。)

幾何学

幾何学とは？

- 幾何学
  - 図形・空間の形を調べる
- 空間
  - 点の集合に何らかの構造が入ったもの
- 空間の例
  - 距離空間、位相空間、多様体など

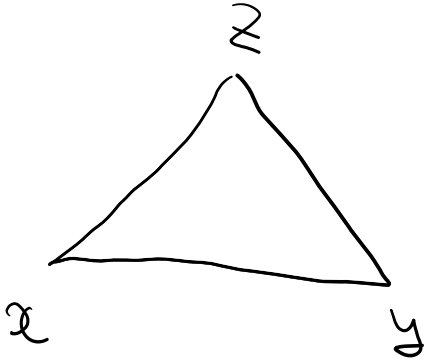
距離空間

- 距離空間とは、集合Xに距離関数という写像

$$d : X \times X \longrightarrow X$$

が定まったもの。ただし、

$$d(x, x) \geq 0$$
$$d(x, y) = d(y, x)$$
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$



例：ユークリッド平面　$\mathbb{R}^2 \simeq \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

距離空間の任意の部分集合はそれ自身距離空間になる。

距離空間としての平面図形

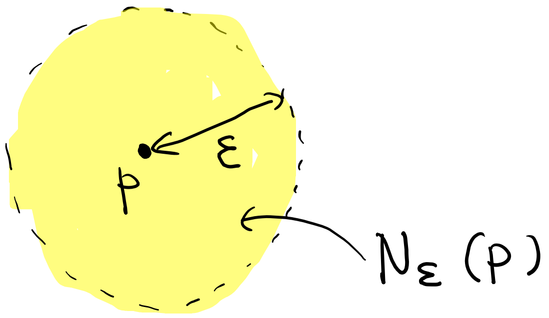
- ユークリッド距離をもつユークリッド平面の部分集合Ｓを距離空間として考えるということは、点の座標などを忘れて、点集合と2点間の距離を与える関数のみを見るということ。

- 様々な問題意識：
  - 2つの距離空間XとYはいつ同じものとみなせるか？
    - XからYへの全単射で距離関数を保つ(d(f(x),f(y))=d(x,y))ものが存在するときに「同じ」とみなす。（等長写像）
  - 距離空間Xからそれ自身への等長写像はどれくらいあるか？（等長変換群）

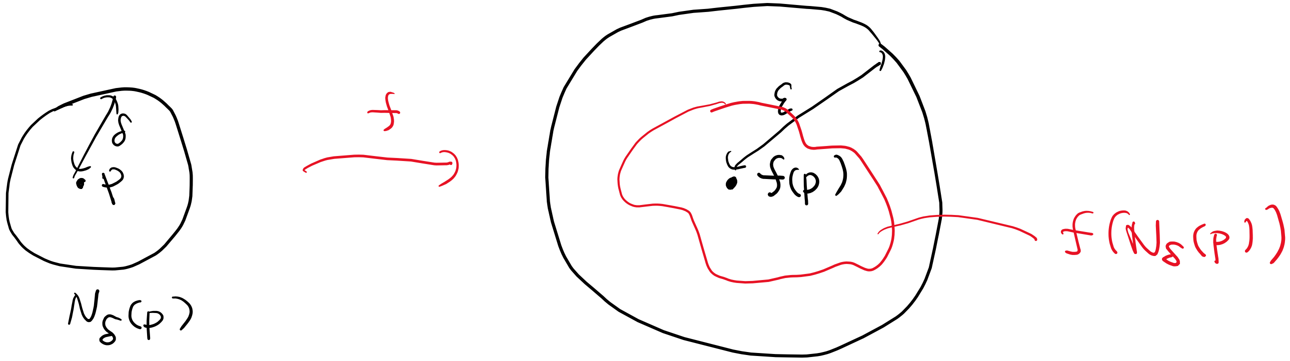
距離空間の定める位相

- 距離空間に対して、点pのε**近傍** $N_\varepsilon(p)$が定義される

$$N_\varepsilon(p) = \{\text{pから距離}\varepsilon\text{ 未満の点}\}$$



距離空間の間の写像 f : X → Y が**連続**であるとは、
「Xの十分に近い点をYの十分に近い点」に移すこと。



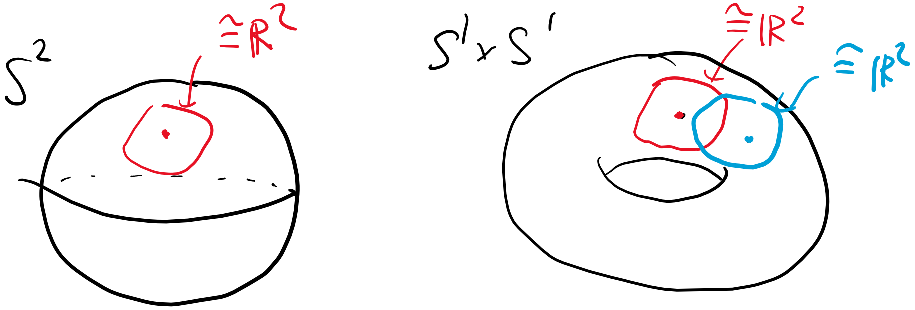
連続性は、距離空間の**位相**によってのみ決まる。

位相空間

- 位相空間とは、位相が与えられた集合である。
- 集合Xの位相とは、Xの部分集合からなる集合（その元を開集合という）であって、次を満たすものをいう。
  - 空集合とXは開集合
  - 開集合U, Vの共通部分は開集合
  - 開集合族の和集合は開集合

- 距離空間には自然に位相が定まる。
- 位相空間においても、**近傍**、**連続写像**の概念が定義される。
- 位相空間はかなり自由度が高い構造である。
  - 例えば、位相空間Xから位相空間Yへの連続写像全体Map(X,Y)には自然な位相（コンパクト開位相）が入り、それ自身位相空間となる。

多様体



- **位相多様体**とは位相空間であって、各点の近傍がある次元のユークリッド空間と**同相**であるようなものである。
  - （ここで、位相空間X,Yが同相とは、それらの間の全単射fで、fとその逆写像がともに連続であるようなものである。言い換えると、XとYが位相空間として同等であること。）
- **可微分多様体**とは位相多様体であって、近傍系の間の変換写像が「無限回連続微分可能」であるようなものである。
- 可微分多様体に対して、その上の可微分関数、接ベクトル、微分形式などを考えることにより、微積分を展開することができる。

多様体の例

- ユークリッド空間 R^n
- ユークリッド空間上で定義される無限回連続微分可能関数

$$f: \ R^n \ \to R$$

の零点集合 $\{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0 \}$.

例えば、n次元球面

$$S^n = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \}.$$

- R^nを張り合わせることによって、n次元の多様体をたくさん作ることができる。

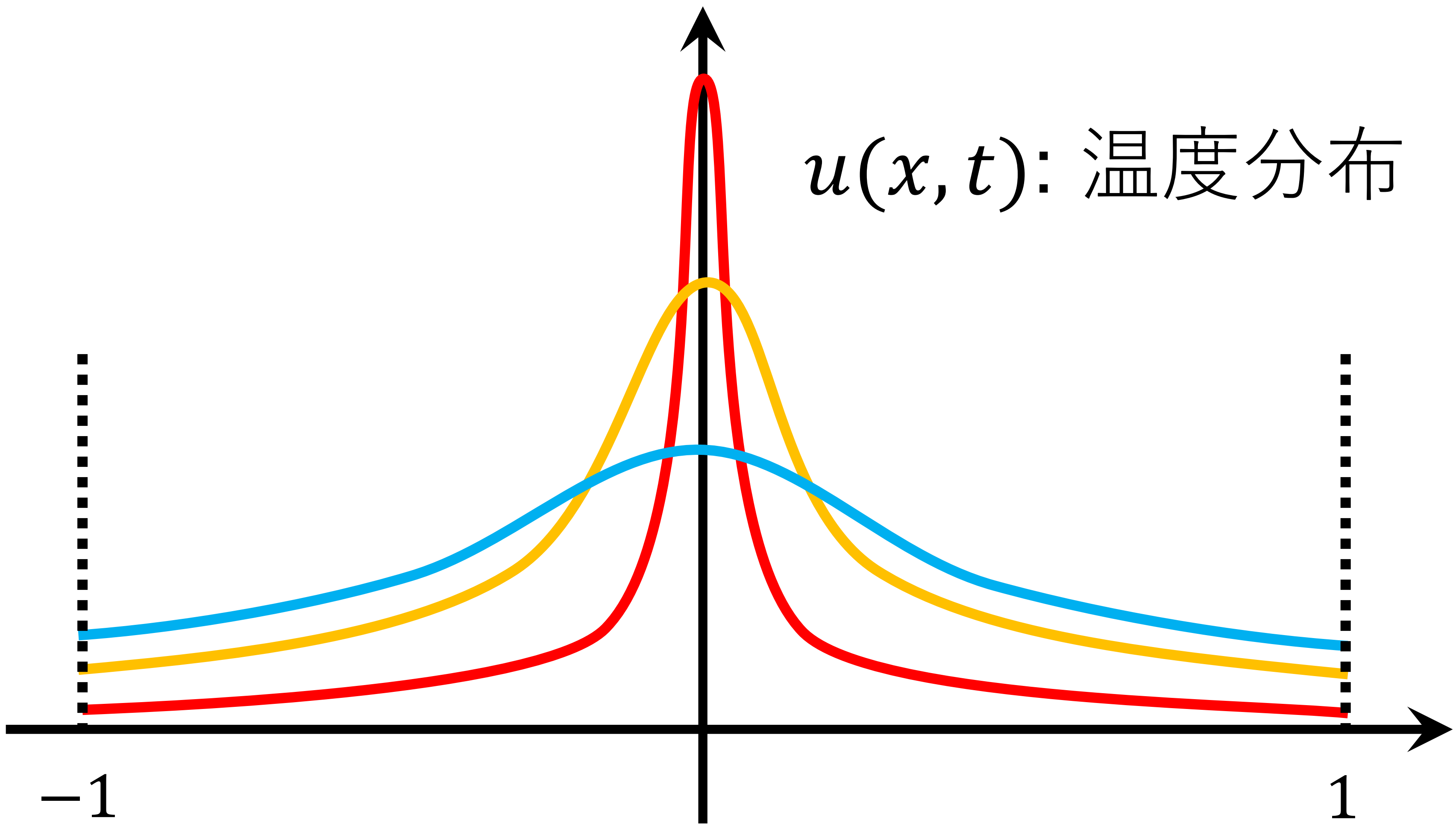
多様体論の発展

- リーマン多様体
  - 多様体に**計量**（接ベクトルや曲線の**長さ**を図るもの）をいれたもの。
- リー群
  - 多様体に群構造を入れたもの
- 複素多様体
  - 多様体に**複素構造**を入れたもの。その上で複素関数論が展開できる。

解析班

熱伝導方程式

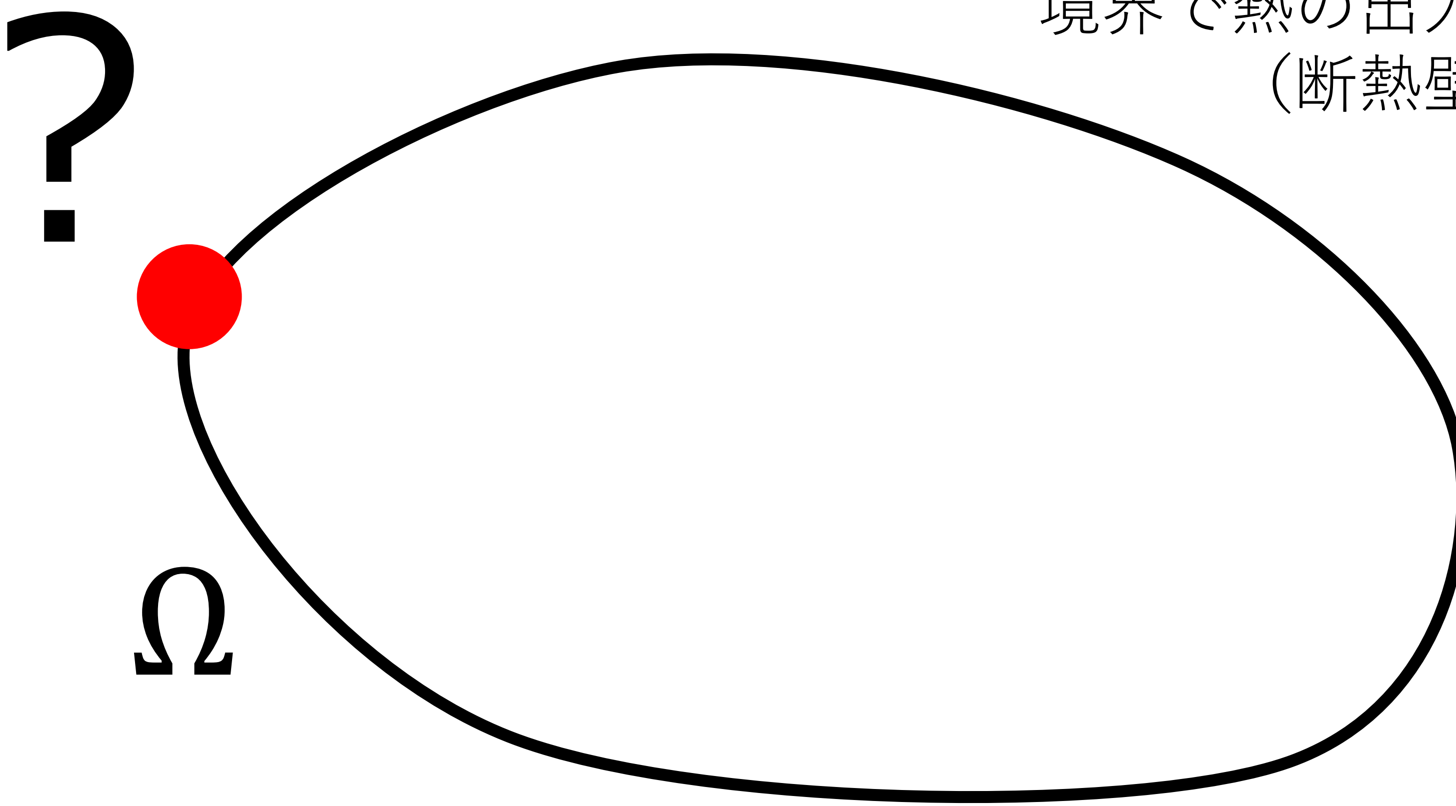
$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$



熱伝導方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y,t)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y,t)$$

境界で熱の出入りがない
（断熱壁）



最も温かい点（**ホットスポット**）はどこか？

ナビエ・ストークス方程式系

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\
\dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{cases}
$$

流体の運動を記述

$(u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t))$: 未知関数

解があるのか？　もしあったら1つなのか？
空気にトゲはないのか？

反応拡散モデル

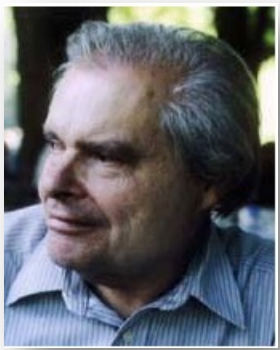
アラン・チューリング (1912-1954)

The chemical basis of morphogenesis (1952)

拡散はパターン（模様）を生成しうる！

計算機科学の父、数学者、論理学者、戦時中の暗号解読者、偏見の犠牲者
(Father of Computer Science, Mathematician, Logician,
Wartime Codebreaker, Victim of Prejudice)

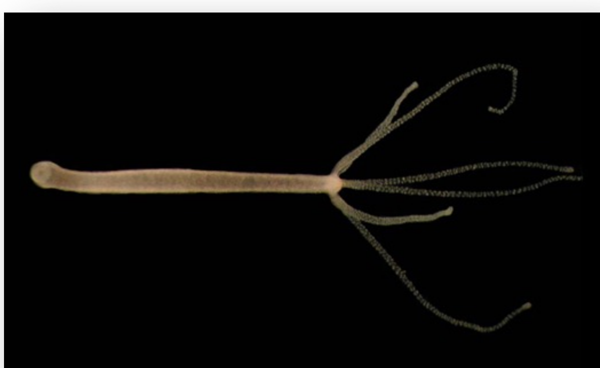
$$
\begin{cases}
u_t = D\Delta u - \mu u + c\rho(x)\dfrac{u^p}{v^q} + \rho_0\rho(x) \\
\tau v_t = D\Delta v - \nu v + \rho'(x)\dfrac{u^r}{v^s}
\end{cases}
$$



アルフレッド・ギーラー

ハンス・マインハルト

約５ｍｍ



Kybernetik 12, 30—39 (1972)

A Theory of Biological Pattern Formation

A. Gierer and H. Meinhardt
Max-Planck-Institut für Virusforschung, Tübingen, Germany

Received: September 8, 1972

Abstract

One of the elementary processes in morphogenesis is the formation of a spatial pattern of tissue structures, starting from almost homogeneous tissue. It will be shown that relatively simple molecular mechanisms based on auto- and cross catalysis can account for a primary pattern of morphogens to determine pattern formation of the tissue. The theory is based on short range activation, long range inhibition, and a distinction between activator and inhibitor concentrations on one hand, and the densities of their sources on the other. While source density is expected to change slowly, e.g. as an effect of cell differentiation, the concentration of activators and inhibitors can change rapidly to establish the primary pattern; this results from auto- and cross catalytic effects on the sources, spreading by diffusion or other mechanisms, and degradation.

Employing an approximative equation, a criterium is derived for models, which lead to a striking pattern, starting from an even distribution of morphogens, and assuming a shallow source gradient. The polarity of the pattern depends on the direction of the source gradient, but can be rather independent of other features of source distribution. Models are proposed which explain size regulation (constant proportion of the parts of the pattern irrespective of total size). Depending on the choice of constants, aperiodic patterns, implying a one-to-one correlation between morphogen concentration and position in the tissue, or nearly periodic patterns can be obtained. The theory can be applied not only to multicellular tissues, but also to intracellular differentiation, e.g. of polar cells.

The theory permits various molecular interpretations. One of the simplest models involves bimolecular activation and monomolecular inhibition. Source gradients may be substituted by, or added to, sink gradients, e.g. of degrading enzymes. Inhibitors can be substituted by substances required for, and depleted by activation.

Sources may be either synthesizing systems or particulate structures releasing activators and inhibitors.

Calculations by computer are presented to exemplify the main features of the theory proposed. The theory is applied to quantitative data on hydra — a suitable one-dimensional model for pattern formation — and is shown to account for activation and inhibition of secondary head formation.

Introduction

The development of an organism is a complex phenomenon involving a set of more elementary processes such as gene regulation, alteration of cell shapes and cell to cell interaction, cell proliferation, growth and cell movement. One of these elementary processes in embryology and regeneration is the formation of a spatial pattern of tissue structures. Starting from almost homogeneous tissue, different areas develop strikingly different structures. In some cases, their proportions are regulated to be independent of total size. The pattern may be aperiodic or periodic.

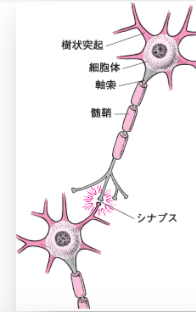
The formation of a morphological pattern is generally assumed to result from a primary pattern (Child, 1941; Waddington, 1962) of morphogen concentrations, or other physical parameters varying in space, often called gradients or fields. Several types of theories have been proposed for this primary pattern: A patterned morphogen distribution can result from auto- and cross catalysis (Turing, 1952). Polar cells may be assumed to pump morphogens in one direction, leading to a graded distribution (Lawrence, 1966). Two periodic events of different wavelengths have been postulated, where the phase difference, which varies in space, is assumed to determine morphogenesis (Goodwin and Cohen, 1969). This paper is concerned with mechanisms of auto- and cross catalysis which are most closely related to known biochemical processes and cellular properties.

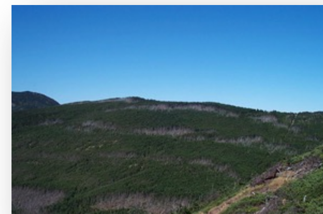
Models of differentiation can be constructed by postulating two substances, with mutual interaction on their respective rates of production (or degradation). Depending on initial conditions, this may lead to different stable states, which may represent states of differentiation (e.g. Delbrück, 1949). Spatial differentiation can be achieved by postulating, in addition, different modes or rates of distribution of these substances in space, e.g. by linear equations employing different diffusion terms as proposed by Turing (1952). However, the solutions of the linear system are generally unstable. Non-linear reaction kinetics, on the other hand, are too general to permit simple and straightforward interpretations in terms of molecular biology unless restrictions are imposed by biological considerations.

These restrictions will be introduced by basing the theory on three postulates suggested by fairly general

A. Gierer and **H. Meinhardt**,
A theory of biological pattern formation,
Kybernetik **12** (1972) 30—39.

- **神経**（軸策）における**パルス**の**伝播**
- **熱帯魚，貝，シマウマ**などの**縞模様**
- 捕食・被捕食モデル（生態モデル）
- 化学反応（BZ反応）
- **生物**の**形態形成**





予測や説明

反応拡散系
半線形放物型方程式系

を研究すれば・・・

理学部ガイダンス・応用数理　令和６年４月２４日

数理科学への誘い

吉田朋広

東京大学大学院数理科学研究科

応用数理とは

- 数学の三つの柱である代数学・幾何学・解析学を取り巻く広大な分野を対象とする数理科学。
- 種々の現象に対する数理モデリング、および数理モデルの数学的性質を研究対象にする。
- 既成の数学の応用にとどまらず、実際の現象にアプローチするための新しい数学の理論を構築する。

応用数理

(A) 非線形現象の数理

(B) 数理物理

(C) 確率と統計の数理

(D) 数学基礎論、計算機科学

- 「確率と統計の数理」の具体的な問題を紹介します。

確率と統計の数理：確率的な漸化式

- ϵ_j $(j \in \mathbb{N})$: 確率$1/2$で$+1$, -1を取る、
  独立な確率変数の列（硬貨投げ）
- 確率的な漸化式

$$a_j = f(a_{j-1}) + g(a_{j-1})\epsilon_j, \quad a_0 = c$$

例

- $f(x) = x$, $g(x) = 1$のとき　$a_j = a_{j-1} + \epsilon_j$
- $c = 0$, $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_3 = -1$, $\ldots$.　のとき、

$$\begin{aligned} a_0 &= c = 0 \\ a_1 &= a_0 + \epsilon_1 = 0 + 1 = 1 \\ a_2 &= a_1 + \epsilon_2 = 1 + 1 = 2, \\ a_3 &= a_2 + \epsilon_3 = 2 - 1 = 1, \ldots \end{aligned}$$

確率的な漸化式：$j = 1000$ まで実験してみる

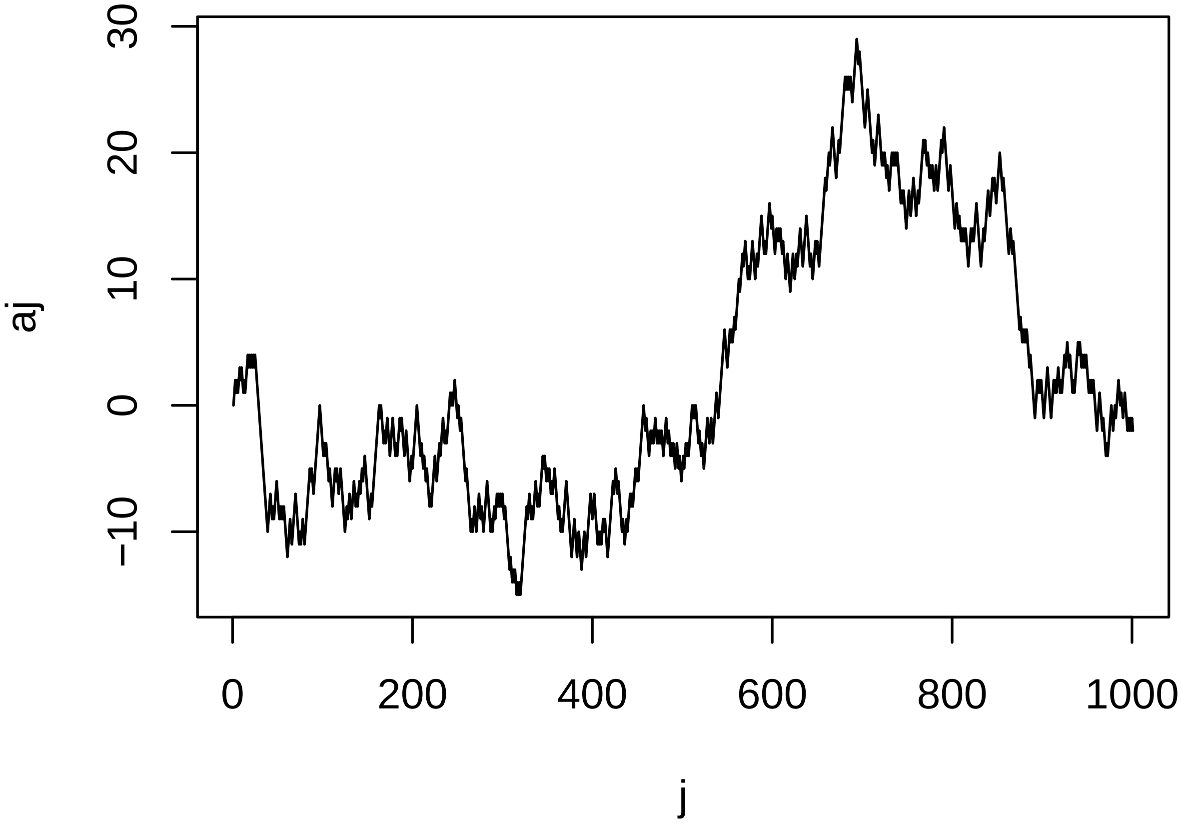


Figure 1: $\boldsymbol{a_j = a_{j-1} + \epsilon_j,\ a_0 = 0}$

確率的な漸化式

- 確率的な漸化式

$$a_j = f(a_{j-1}) + g(a_{j-1})\epsilon_j, \quad a_0 = c$$

の極限（時空間スケーリング：グラフを遠くから眺める）

$\Downarrow$

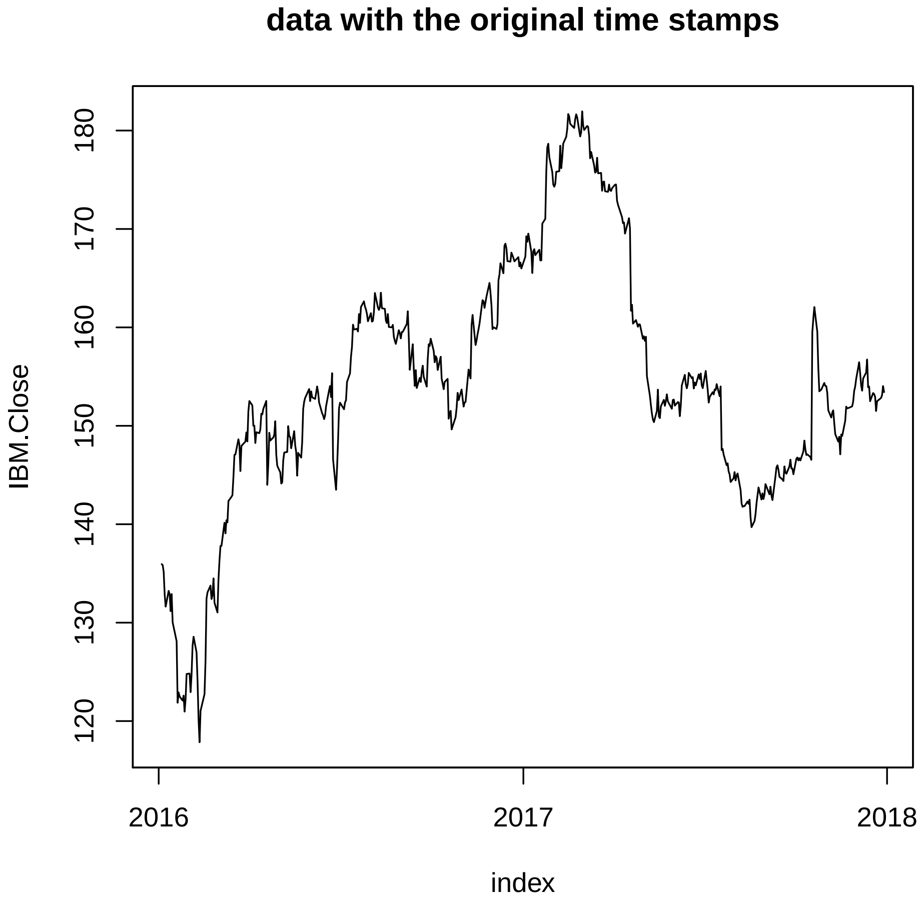
- 確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dw_t, \quad X_0 = x_0$$

ここで、$t \in [0, \infty)$

- 微分積分学 $\Rightarrow$ 測度論（ルベーグ積分論）
$\Rightarrow$ 確率論 $\Rightarrow$ 確率解析（伊藤解析）

数理ファイナンス：株価



- 確率微分方程式(Black-Scholes モデル）で記述する：

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dw_t, \quad X_0 = x_0$$

株価の予測

- データから株価の将来予測は可能か？
- 確率微分方程式(Black-Scholes モデル)：

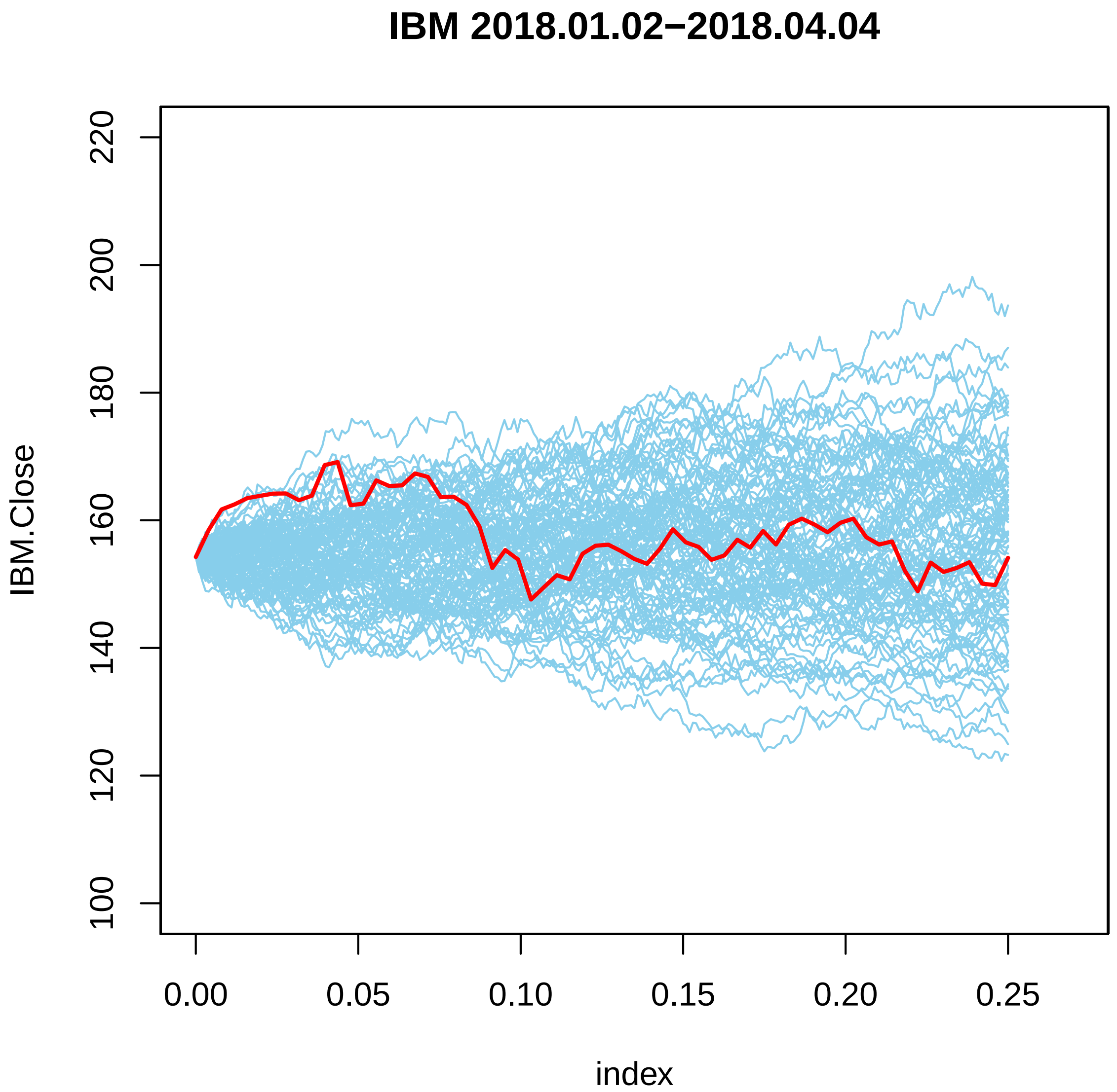
$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dw_t, \quad X_0 = x_0$$

- 未知パラメータ μ, σ をデータから推定する（学習する）
  $\Rightarrow$ 確率過程の統計学
- 2016.01.04〜2017.12.29 のデータからパラメータを推定

$$\hat{\mu} = 0.07668582, \quad \hat{\sigma} = 0.18820717$$

- 2018 年はじめから 3 ヶ月先までの株価のパスをシミュレーションで予測する $\Rightarrow$ 確率数値解析

株価の予測：2018年はじめから3ヶ月先までの株価のパスをシミュレーションで予測



数学として

- 微分積分学 $\Rightarrow$ 測度論（ルベーグ積分論）

  $\Rightarrow$ 確率論　$\Rightarrow$ 確率解析（伊藤解析）

  $\Rightarrow$ 確率過程の統計学

  　確率数値解析

  　数理ファイナンス

金融工学：デリバティブ（派生証券）の価格付け問題

- 株価 X_t が確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dw_t, \quad X_0 = x_0$$

に従うとき、デリバティブ（エイジアンコールオプション）の価格を計算せよ：

$$C = E\left[\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt - K\right)^+\right]$$

- モンテカルロ法（計算時間、統計的誤差の問題）
- 漸近展開（高速、高精度）

$$C \sim c_0 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \cdots + \epsilon^k c_k \quad (\epsilon \downarrow 0)$$

モンテカルロ法で３ヶ月かかる計算が、数秒で可能に。
$\Leftarrow$ マリアバン解析（無限次元確率解析）
極限定理・漸近展開
ソフトウエア開発

数学として

- 微分積分学 $\Rightarrow$ 測度論（ルベーグ積分論）
  $\Rightarrow$ 確率論 $\Rightarrow$ 確率解析（伊藤解析）
  $\Rightarrow$ 確率過程の統計学
  確率数値解析
  数理ファイナンス
  マリアバン解析（無限次元確率解析）
  極限定理・漸近展開
  ソフトウエア開発

数学として

- 微分積分学 $\Rightarrow$ 測度論（ルベーグ積分論）

  $\Rightarrow$ 確率論 $\Rightarrow$ 数理統計学

  $\Rightarrow$ データサイエンス

  機械学習

  生物統計・臨床統計

  保険数理・アクチュアリー

応用数理への誘い

- ここで紹介したものは、数学科で行なっている数学・数理科学研究の１つの例にすぎません。
- 皆さんの数学・数理科学への挑戦に期待しています。